INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIV. BAND DRITTES HEFT 1956

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 22. Mai 1956

Postverlagsort Berlin *Preis DM 14,60*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN
einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Özden, K., Biegung dünner Platten und Variationssätze bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz. Mit 3 Textabbildungen 133

Isay, W.-H., Zur Berechnung der Strömung durch Voith-Schneider-Propeller. Mit 9 Textabbildungen 148

Ray, A. K., Einfluß der Bohrlochgröße auf die Anzeige des statischen Druckes bei verschiedenen *Reynolds*zahlen. Mit 11 Textabbildungen 171

Paslay, P. R., und *A. Slibar*, Optimale Auslegung von Salomon-Schwingungstilgern. Mit 3 Textabbildungen 182

Sieker, K.-H., Zur algebraischen Maßsynthese ebener Kurbelgetriebe (I. Mitteilung). Mit 20 Textabbildungen 188

Falk, S., Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. Mit 16 Textabbildungen 216

INGENIEUR-ARCHIV

XXIV. BAND DRITTES HEFT 1956

Biegung dünner Platten und Variationssätze bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz

Von K. Özden

1. Einleitung und Übersicht. Viele Stoffe befolgen auch schon bei kleinen endlichen Verzerrungen nicht mehr das *Hooke*sche Gesetz, so daß man an seiner Stelle mit einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz rechnen muß. Ein solches Gesetz, dessen Anwendbarkeit wie in der klassischen Elastizitätstheorie auf kleine endliche Verzerrungen beschränkt bleibt, hat *H. Kauderer* angegeben[1]. In dieser Arbeit sollen nun einige Wege aufgezeigt werden, auf denen sich mit diesem Gesetz die Biegung dünner Platten berechnen läßt.

Nach einer Zusammenstellung der Grundgleichungen des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes (Ziff. 2) werden die Differentialgleichungen für die Biegung dünner Platten in rechtwinkligen (Ziff. 3) und in Polarkoordinaten (Ziff. 4) hergeleitet. Die letzteren werden für den speziellen Fall der gleichförmig belasteten dünnen Kreisplatte mit eingespannten Rändern mittels einer Potenzreihenmethode gelöst (Ziff. 5). Da dieses Verfahren umständlich ist und die Reihen schlecht konvergieren, werden noch zwei weitere Lösungsverfahren, die auf Variationssätzen beruhen, allgemein entwickelt. Hierzu wird zunächst (Ziff. 6) auf Grund einer Untersuchung von *J. H. Argyris*[2] der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit für das nichtlineare Elastizitätsgesetz allgemein formuliert und sodann (Ziff. 7) zu einer Näherungslösung des schon vorher (Ziff. 5) behandelten Kreisplattenproblems nach dem Verfahren von *Ritz* herangezogen. Sodann wird gezeigt (Ziff. 8), daß man auch das Verfahren von *Galerkin* bei dem nichtlinearen Elastizitätsgesetz zur Berechnung der Plattenbiegung verwenden kann. Die nach den Verfahren von *Ritz* und *Galerkin* erzielten Ergebnisse zeigen (Ziff. 9) eine gute Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Potenzreihenmethode. Dies gibt Anlaß zu einer Untersuchung über die allgemeine Anwendbarkeit des beim *Ritz*schen oder beim *Galerkin*schen Verfahren benützten, besonders bequemen Näherungsansatzes für die Verschiebungen (Ziff. 10), wobei als weiteres Beispiel auch noch die eingespannte Kreisplatte mit parabolischer Lastverteilung behandelt wird. Den Abschluß der Arbeit bilden einige kritische Bemerkungen über die erzielten Ergebnisse (Ziff. 11).

2. Das nichtlineare Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen. Mit den auf ein rechtwinkliges räumliches (x, y, z)-System bezogenen Spannungs- und Verzerrungskomponenten

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}; \quad \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \psi_{xy}, \psi_{yz}, \psi_{zx},$$

lauten die Grundgleichungen des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0 + 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_x - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_y &= 3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0 + 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_y - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_z &= 3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_2 + 2\,G\,\gamma(\psi_0^2)\,(\varepsilon_z - \varepsilon_0)\,, \\ \tau_{yz} &= G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{yz},\ \tau_{zx} = G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{zx}, \tau_{xy} = G\,\gamma(\psi_0^2)\,\psi_{xy}, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

mit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \qquad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 3\,K\,\varkappa(\varepsilon_0)\,\varepsilon_0\,. \tag{2.2}$$

Hierbei bedeuten K und G den Kompressions- und den Schubmodul der linearen Theorie, und

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \psi_0^2 &= \frac{2}{3}\{2\,[(\varepsilon_x - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_0)^2] + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2 + \psi_{xy}^2\} \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

---

[1] *H. Kauderer*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 450.

[2] *J. H. Argyris*, Aircraft Engineering 26 (1954), S. 347.

sind die Invarianten des Kugeltensors und des Deviators, in die sich der Verzerrungstensor zerlegen läßt. Von der Dehnungsfunktion $\varkappa(\varepsilon_0)$ und der Scherungsfunktion $\gamma(\psi_0^2)$ wollen wir annehmen, daß sie sich mit den Koeffizienten $\varkappa_i$ und γ_{2j} (welche Stoffkonstanten sind) in Potenzreihen vor folgender Form entwickeln lassen:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa(\varepsilon_0) &= 1 + \varkappa_1 \varepsilon_0 + \varkappa_2 \varepsilon_0^2 + \varkappa_3 \varepsilon_0^3 + \cdots, \\ \gamma(\psi_0^2) &= 1 + \gamma_2 \psi_0^2 + \gamma_4 \psi_0^4 + \gamma_6 \psi_0^6 + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

3. Die Differentialgleichung für die Biegung dünner Platten in rechtwinkligen Koordinaten. Um die Plattengleichung für das nichtlineare Elastizitätsgesetz aufzustellen, wollen wir die folgenden in der Theorie der dünnen Platten mit kleiner Durchbiegung üblichen Annahmen treffen:

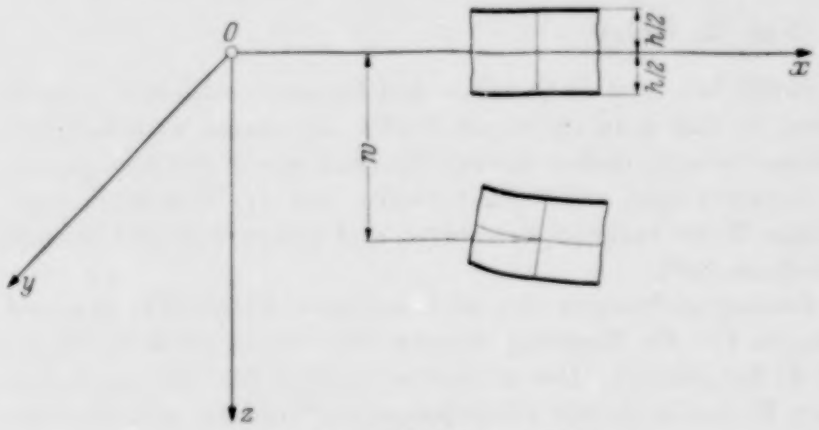


Abb. 1. Platte im Koordinatensystem.

1) Körperfeste Geraden, die vor der Biegung auf der ebenen Mittelfläche senkrecht gestanden sind, bleiben auch während der Verzerrung Normalen der gekrümmten Mittelfläche.

2) Die Normalspannung senkrecht zur Mittelfläche ist klein und kann in den Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung vernachlässigt werden.

3) Die Verzerrungen innerhalb der Plattenmittelfläche sind klein von höherer Ordnung und können ebenfalls vernachlässigt werden.

Die Dicke der Platte habe den konstanten Wert h. Als Koordinatensystem verwenden wir ein rechtwinkliges (x, y, z)-System, bei dem die Mittelfläche der Platte vor der Biegung mit der (x, y)-Ebene zusammenfällt und somit die z-Achse auf dieser Mittelfläche senkrecht steht (Abb. 1).

Bedeutet nun $w(x, y)$ die Durchbiegung des Punktes (x, y) der Mittelfläche, und bezeichnet man die partiellen Ableitungen von $w(x, y)$ nach x oder y durch angehängte Indices, so wird auf Grund der obigen Annahmen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z\, w_{xx}, & \varepsilon_y &= -z\, w_{yy}, \\ \psi_{xy} &= -2z\, w_{xy}, & \psi_{yz} &= \psi_{zx} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Setzen wir die Spannung σ_z senkrecht zur Mittelfläche gleich Null, so folgt aus (2.2)

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K\varkappa(\varepsilon_0)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{9K\varkappa(\varepsilon_0)} \tag{3.2}$$

und somit aus den ersten beiden Gleichungen (2.1)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)\varepsilon_x - \frac{2}{3}\frac{G}{K}\frac{\gamma(\psi_0^2)}{\varkappa(\varepsilon_0)}\sigma_0, \\ \sigma_y &= \sigma_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)\varepsilon_y - \frac{2}{3}\frac{G}{K}\frac{\gamma(\psi_0^2)}{\varkappa(\varepsilon_0)}\sigma_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Mit den Ausdrücken (3.1) für die Verzerrungen und den Grundgleichungen (2.1) kann man jetzt die Normalspannungen σ_x und σ_y und die Schubspannungen τ_{xy} in den Ableitungen von $w(x, y)$ darstellen. Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -Gz[(w_{xx} - w_{yy})s + 2t\, w_{yy}], \\ \sigma_y &= -Gz[(w_{yy} - w_{xx})s + 2t\, w_{xx}], \\ \tau_{xy} &= 2Gz\gamma(\psi_0^2) w_{xy}, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

wobei s und t Abkürzungen für die folgenden Ausdrücke sind:

$$\left.\begin{aligned} s &= \gamma(\psi_0^2)\left[1 + \frac{9K}{3K + 4G\frac{\gamma(\psi_0^2)}{\varkappa(\varepsilon_0)}}\right], \\ t &= \gamma(\psi_0^2)\frac{9K}{3K + 4G\frac{\gamma(\psi_0^2)}{\varkappa(\varepsilon_0)}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Um nun die Gleichgewichtsbedingungen an einem Plattenelement $dx\,dy$ aufzustellen, führen wir (Abb. 2) die auf die Längeneinheit bezogenen Schnittmomente

$$m_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x\, z\, dz\,, \qquad m_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y\, z\, dz\,, \qquad m_{yx} = -\,m_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy}\, z\, dz \tag{3.6}$$

und Schnittkräfte

$$q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz}\, dz\,, \qquad q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz}\, dz \tag{3.7}$$

ein.

Steht nun die Platte unter einer Druckbelastung $p(x, y)$, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen für das Plattenelement

$$\left.\begin{aligned} q_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}\,, \\ q_y &= \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x}\,, \\ p(x, y) &+ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

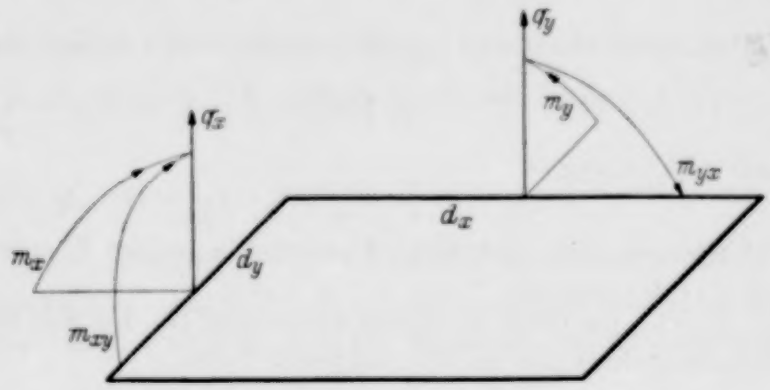


Abb. 2. Schnittkräfte und Schnittmomente.

Durch die Beziehungen (3.4) lassen sich jetzt die Schnittmomente in den Ableitungen der Funktion $w(x, y)$ darstellen. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} m_x &= -\,G\,\frac{h^3}{12}\,[(w_{xx} - w_{yy})\,S + 2\,w_{yy}\,T]\,, \\ m_y &= -\,G\,\frac{h^3}{12}\,[(w_{yy} - w_{xx})\,S + 2\,w_{xx}\,T]\,, \\ m_{yx} &= -\,m_{xy} = -\,G\,\frac{z\,h^3}{12}\,Q\,w_{xy}\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

wobei zur Abkürzung

$$S = \frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{+h/2} s\, z^2\, dz\,, \qquad T = \frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{+h/2} t\, z^2\, dz\,, \qquad Q = \frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{+h/2} \gamma(\psi_0^2)\, z^2\, dz \tag{3.10}$$

gesetzt ist.

Geht man mit (3.9) in die Gleichgewichtsbedingungen (3.8) ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} q_x &= -\,G\,\frac{h^3}{12}\,[S\,(w_{xxx} - w_{yyx}) + S_x\,(w_{xx} - w_{yy}) + 2\,T\,w_{yyx} + \\ &\qquad + 2\,T_x\,w_{yy} + 2\,Q\,w_{yyx} + 2\,Q_y\,w_{xy}]\,, \\ q_y &= -\,G\,\frac{h^3}{12}\,[S\,(w_{yyy} - w_{xxy}) + S_y\,(w_{yy} - w_{xx}) + 2\,T\,w_{xxy} + \\ &\qquad + 2\,T_y\,w_{xx} + 2\,Q\,w_{xxy} + 2\,Q_x\,w_{xy}]\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

wobei wir ebenso wie bei $w(x, y)$, auch bei den Hilfsfunktionen S, T und Q die Ableitungen nach x und y durch Indices bezeichnen. Wenn wir (3.11) in die letzte Gleichung (3.8) einsetzen, so folgt schließlich die Plattengleichung in Form der folgenden Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{12\,p(x, y)}{G\,h^3} &= S\,\Delta\Delta w + 2\,S_x\,(w_{xxx} + w_{yyx}) + 2\,S_y\,(w_{xxy} + w_{yyy}) + 4\,Q_{xy}\,w_{xy} + \\ &\quad + [(S_{xx} - S_{yy}) + 2\,T_{yy}]\,w_{xx} + [(S_{yy} - S_{xx}) + 2\,T_{xx}]\,w_{yy} \end{aligned} \tag{3.12}$$

mit $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Da S, T und Q nach (3.10) die von ε_0 und ψ_0^2 abhängigen Funktionen s und t enthalten, müssen wir jetzt noch ε_0 und ψ_0^2 in $w(x, y)$ ausdrücken, um die Plattengleichung anwenden zu können. Aus der eingangs getroffenen zweiten Annahme und der Tatsache, daß ε_z klein sein muß

im Vergleich mit ε_x und ε_y, folgt aus (2.1) und (2.2) mit der Stoffkonstanten

$$\eta = \frac{3K - 2G}{3K + 4G} \tag{3.13}$$

die Näherungsgleichung für ε_z zu

$$\varepsilon_z \approx z\,\eta\,\Delta w\,. \tag{3.14}$$

Hieraus ergibt sich, zusammen mit (3.1), aus (2.2)

$$\varepsilon_0 = -\frac{z}{3}(1-\eta)\,\Delta w\,. \tag{3.15}$$

Gehen wir hiermit und mit (3.1) in die zweite Gleichung (2.2) ein, so folgt schließlich

$$\psi_0^2 = \frac{8}{9} z^2 \left[l_1 (w_{xx}^2 + w_{yy}^2) - l_2\, w_{xx}\, w_{xy} + 3\, w_{xy}^2\right] \tag{3.16}$$

mit Abkürzungen

$$l_1 = 1 + \eta + \eta^2, \quad l_2 = 1 - 2\eta - 2\eta^2. \tag{3.17}$$

Hiermit sind sämtliche Funktionen in der Plattengleichung (3.12) durch Ableitungen von $w(x, y)$ dargestellt.

Wir wollen jetzt die Plattengleichung für den Sonderfall spezialisieren, daß die Dehnungs- und Scherungsfunktion in der einfachen Form

$$\left.\begin{aligned} \varkappa(\varepsilon_0) &= 1 + \varkappa_2\, \varepsilon_0^2, \\ \gamma(\psi_0^2) &= 1 + \gamma_2\, \psi_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

gegeben sind. Mit diesem Ansatz und den soeben gefundenen Ausdrücken (3.15) und (3.16) für ε_0 und ψ_0^2 erhält die Funktion t nach (3.5) die spezielle Gestalt

$$t \approx \frac{9K(1 + \gamma_2 \psi_0^2 + \varkappa_2 \varepsilon_0^2)}{(3K + 4G) + 3K\varkappa_2 \varepsilon_0^2 + 4G\gamma_2 \psi_0^2}. \tag{3.19}$$

Entwickelt man diese Funktion in eine *Taylor*sche Reihe und beschränkt man sich näherungsweise auf die beiden ersten Glieder (die Berechtigung dieser Näherung wird sich später an Zahlenbeispielen erweisen), so erhält man

$$t = e_1 + \frac{z^2}{9} F_1(w)\,, \tag{3.20}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} F_1(w) &= e_1 a_1 \left(w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + \frac{b_1}{a_1} w_{xx} w_{yy} + \frac{c_1}{a_1} w_{xy}^2\right), \\ e_1 &= \frac{9K}{3K + 4G}, \\ a_1 &= \frac{4G\varkappa_2(1-\eta)^2 + 24\gamma_2 K l_1}{3K + 4G}, \\ b_1 &= \frac{8G\varkappa_2(1-\eta)^2 - 24\gamma_2 K l_2}{3K + 4G}, \\ c_1 &= \frac{72\gamma_2 K}{3K + 4G} \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

zu setzen ist. Aus (3.5) folgt weiter

$$s = t + \gamma(\psi_0^2) = e + \frac{z^2}{9} F(w) \tag{3.22}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} F(w) &= a\left(w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + \frac{b}{a} w_{xx} w_{yy} + \frac{c}{a} w_{xy}^2\right), \\ e &= e_1 + 1\,, \\ a &= a_1 e_1 + 8\gamma_2 l_1\,, \\ b &= b_1 e_1 - 8\gamma_2 l_2\,, \\ c &= c_1 e_1 + 24\gamma_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Mit diesen Beziehungen lassen sich die in (3.10) eingeführten Funktionen in der Form

$$\left.\begin{aligned} S &= e + \frac{h^2}{60} F(w), \\ T &= e_1 + \frac{h^2}{60} F_1(w), \\ Q &= 1 + \frac{h^2}{60} F_2(w) \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

ausdrücken, wobei noch

$$F_2(w) = 8\,\gamma_2\,[l_1\,(w_{xx}^2 + w_{yy}^2) - l_2\,w_{xx}\,w_{yy} + 3\,w_{xy}^2] \tag{3.25}$$

ist. Geht man mit den Ausdrücken für S, T und Q nach (3.24) in die Plattengleichung (3.12) ein, so nimmt sie die folgende spezielle Form an:

$$\frac{12\,p(x,y)}{G\,h^3} = e\,\Delta\Delta w + \frac{h^2}{60}\{F(w)\,\Delta\Delta w + 2\,F_x\,(w_{xxx} + w_{yyx}) + 2\,F_y\,(w_{xxy} + w_{yyy}) + \\ + 4\,F_{2xy}\,w_{xy} + [(F_{xx} - F_{yy}) + 2\,F_{1yy}]\,w_{xx} + [(F_{yy} - F_{xx}) + 2\,F_{1xx}]\,w_{yy}\}. \tag{3.26}$$

4. Die Biegung der Platten in Polarkoordinaten. An Stelle der rechtwinkligen benützen wir jetzt die in Abb. 3 dargestellten Polarkoordinaten r und ϑ. Um für dieses Koordinatensystem die Plattengleichung und die Ausdrücke für die Normalspannungen σ_r, σ_ϑ sowie für die Schubspannung $\tau_{r\vartheta}$ aufzustellen, brauchen wir die bekannten Formeln zur Umrechnung der Ableitungen w_{xx} w_{yy} ... w_{yyyy} in Ableitungen nach den Polarkoordinaten.

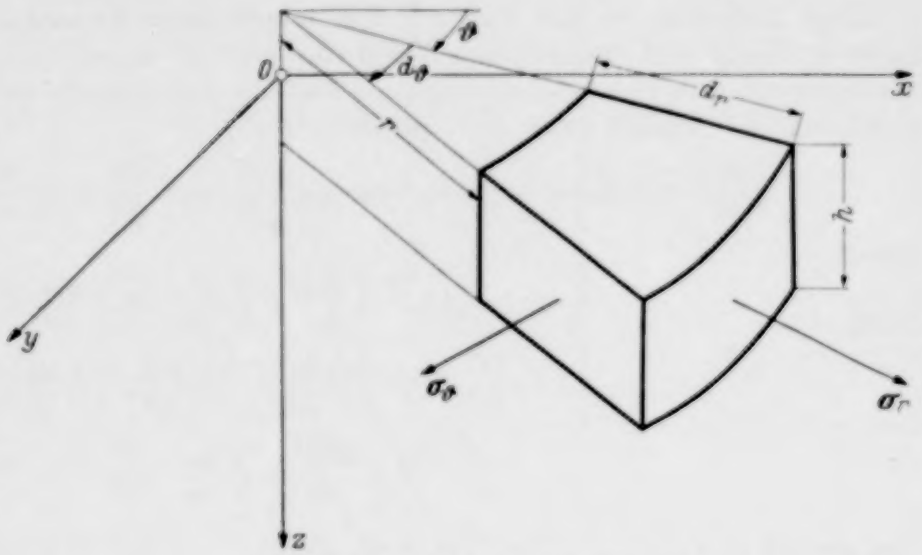


Abb. 3. Plattenelement in Polarkoordinaten.

Nehmen wir speziell an, die x-Achse falle mit der r-Achse für $\vartheta = 0$ zusammen, so erhalten die Verzerrungen ε_r, ε_ϑ, $\psi_{r\vartheta}$, die Schnittkräfte q_r, q_ϑ und die Schnittmomente m_r, m_ϑ, $m_{r\vartheta}$ dieselben Werte wie die entsprechenden Größen ε_x, ε_y, ψ_{xy}; q_x, q_y; m_x, m_y, m_{xy} im gleichen Punkt des festen Körpers, und wir erhalten, wenn wir die Darstellung der Ableitungen von w in Polarkoordinaten benützen und dort $\vartheta = 0$ setzen, mit

$$\left.\begin{aligned} \Delta w \equiv w_{xx} + w_{yy} &= w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\vartheta\vartheta}, \\ w_{xx} - w_{yy} &= w_{rr} - \frac{1}{r} w_r - \frac{1}{r^2} w_{\vartheta\vartheta} \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

die Verzerrungen gemäß (3.1) zu

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= -z\,w_{rr}, \\ \varepsilon_\vartheta &= -z\left(\frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\vartheta\vartheta}\right), \\ \psi_{r\vartheta} &= -2z\left(\frac{1}{r} w_{r\vartheta} - \frac{1}{r^2} w_\vartheta\right), \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

die Spannungen gemäß (3.4) zu

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -G\,z\left[\left(w_{rr} - \frac{1}{r} w_r - \frac{1}{r^2} w_{\vartheta\vartheta}\right) s + 2\left(\frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\vartheta\vartheta}\right) t\right], \\ \sigma_\vartheta &= -G\,z\left[\left(\frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\vartheta\vartheta} - w_{rr}\right) s + 2\,w_{rr}\,t\right], \\ \tau_{r\vartheta} &= -2\,G\,z\,\gamma(\psi_0^2)\left(\frac{1}{r} w_{r\vartheta} - \frac{1}{r^2} w_\vartheta\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

und unter der speziellen Annahme (3.18) für $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $\gamma(\psi_0^2)$ gemäß (3.21), (3.23) und (3.25) die Hilfsfunktionen F, F_1 und F_2 zu

$$\left.\begin{aligned} F(w) &= a\left[w_{rr}^2+\left(\frac{1}{r}w_r+\frac{1}{r^2}w_{\vartheta\vartheta}\right)^2+\frac{b}{a}w_{rr}\left(\frac{1}{r}w_r+\frac{1}{r^2}w_{\vartheta\vartheta}\right)+\frac{c}{a}\left(\frac{1}{r}w_{r\vartheta}-\frac{1}{r^2}w_\vartheta\right)\right],\\ F_1(w) &= e_1 a_1\left[w_{rr}^2+\left(\frac{1}{r}w_r+\frac{1}{r^2}w_{\vartheta\vartheta}\right)^2+\frac{b_1}{a_1}w_{rr}\left(\frac{1}{r}w_r+\frac{1}{r^2}w_{\vartheta\vartheta}\right)+\frac{c_1}{a_1}\left(\frac{1}{r}w_{r\vartheta}-\frac{1}{r^2}w_\vartheta\right)\right],\\ F_2(w) &= 8\gamma_2\left[l_1 w_{rr}^2+l_1\left(\frac{1}{r}w_r+\frac{1}{r^2}w_{\vartheta\vartheta}\right)^2-l_2 w_{rr}\left(\frac{1}{r}w_r+\frac{1}{r^2}w_{\vartheta\vartheta}\right)+3\left(\frac{1}{r}w_{r\vartheta}-\frac{1}{r^2}w_\vartheta\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Hiermit nimmt schließlich die Plattengleichung (3.26) die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{12\,p(r,\vartheta)}{G\,h^3} = e\,\Delta\Delta w &+ \frac{h^2}{60}\Big\{F\,\Delta\Delta w+2\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w)+2\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\frac{1}{r}\frac{\partial(\Delta w)}{\partial\vartheta}+4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial\vartheta}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\vartheta}\right)+\\ &+\left[\frac{\partial^2F}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\vartheta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial F_1}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2F_1}{\partial\vartheta^2}\right]\frac{\partial^2w}{\partial r^2}+\\ &+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\vartheta^2}-\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+2\frac{\partial^2F_1}{\partial r^2}\right]\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\vartheta}\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Liegt insbesondere der Fall der Kreisplatte oder Kreisringplatte mit achsensymmetrischer Lastverteilung und ebensolchen Randbedingungen vor, so wird auch die Durchbiegung achsensymmetrisch und von ϑ unabhängig, so daß alle Ableitungen nach ϑ verschwinden. Die Plattengleichung (4.5) erhält dann die einfachere Form

$$\frac{12\,p(r)}{G\,h^3} = e\,\Delta\Delta w+\frac{h^2}{60}\left\{F\,\Delta\Delta w+H\frac{dF}{dr}+N\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dw}{dr}\frac{d^2F_1}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d^2w}{dr^2}\frac{dF_1}{dr}\right\}, \tag{4.6}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Delta w &\equiv \frac{d^4w}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3w}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr},\\ H &= 2\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr},\\ N &= \frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

und gemäß (4.4)

$$\left.\begin{aligned} F &= a\left(w_{rr}^2+\frac{1}{r^2}w_r^2+\frac{b}{a}\frac{1}{r}w_{rr}w_r\right),\\ F_1 &= e_1 a_1\left(w_{rr}^2+\frac{1}{r^2}w_r^2+\frac{b_1}{a_1}\frac{1}{r}w_{rr}w_r\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

zu setzen ist. (Die Ableitungen nach r sind hier durch Indices angedeutet.) Die Konstanten a_1, b_1, e_1, a, b, e sind schon in (3.21) und (3.23) definiert worden.

Führen wir noch mit dem Plattenhalbmesser R die dimensionslosen Größen

$$\left.\begin{aligned} &\varrho=\frac{r}{R},\quad \zeta=\frac{w}{h},\quad \mu=\frac{h^4\,a}{60\,e\,R^4},\quad \frac{1}{D}=\frac{12\,R^4}{G\,h^4\,e},\\ &Z(\zeta)=\frac{R^4}{a\,h^2}F(w),\quad Z_1(\zeta)=\frac{R^4}{a\,h^2}F_1(w) \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

ein, so geht die Plattengleichung über in

$$\frac{p(\varrho)}{D} = \Delta\Delta\zeta+\mu\left[Z\,\Delta\Delta\zeta+\frac{dZ}{d\varrho}H(\zeta)+\frac{d^2Z}{d\varrho^2}N(\zeta)+2\frac{d^2Z}{d\varrho^2}\frac{1}{\varrho}\frac{d\zeta}{d\varrho}+2\frac{dZ_1}{d\varrho}\frac{1}{\varrho}\frac{d^2\zeta}{d\varrho}\right]. \tag{4.10}$$

5. Biegung der Kreisplatte mit eingespanntem Rand unter gleichförmiger Belastung. Um die Plattengleichung (4.10) für den Fall der gleichförmigen Belastung $p=p_0=$ konst. zu lösen, setzen wir die dimensionslose Durchbiegung $\zeta=w/h$ in Form einer Potenzreihe in ϱ^2 an:

$$\zeta = d_0+d_2\varrho^2+d_4\varrho^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}d_{2n}\varrho^{2n} \tag{5.1}$$

und gehen hiermit in die Plattengleichung (4.10) ein. Die Forderung, daß diese für alle Werte von ϱ erfüllt sein muß, liefert dann für die Koeffizienten $d_4, d_6, d_8, \ldots$ die folgenden Rekursionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} d_4 &= \frac{p_0}{64\,D}\,\frac{1}{M}, \\ d_6 &= -\frac{16}{9}\,\mu\,\frac{\left[6\left(2+\frac{b}{a}\right)+\frac{e_1 a_1}{a}\left(14+5\,\frac{b_1}{a_1}\right)\right] d_2 d_4^2}{M}, \\ d_8 &= -\frac{4}{3}\,\mu\,\frac{A_1 d_2 d_4 d_6 + A_2 d_4^3}{M}, \\ d_{10} &= -\frac{2}{25}\,\mu\,\frac{A_3 d_2 d_4 d_8 + A_4 d_2 d_6^2 + A_5 d_4 d_6}{M}, \\ d_{12} &= -\frac{\mu}{15}\,\frac{A_6 d_2 d_4 d_{10} + A_7 d_2 d_6 d_8 + A_8 d_4^2 d_8 + A_9 d_4 d_6^2}{M} \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

usw., in denen

$$\left.\begin{aligned} M &= 1 + 4\,\mu\left[\left(2+\frac{b}{a}\right)+2\,\frac{e_1 a_1}{a}\left(2+\frac{b_1}{a_1}\right)\right] d_2^2, \\ A_1 &= 3\left[7\left(2+\frac{b}{a}\right)+\frac{e_1 a_1}{a}\left(16+5\,\frac{b_1}{a_1}\right)\right], \\ A_2 &= 2\left(10+3\,\frac{b}{a}\right)+\frac{e_1 a_1}{a}\left(10+3\,\frac{b_1}{a_1}\right), \\ A_3 &= 400\left(2+\frac{b}{a}\right)+2\,\frac{e_1 a_1}{a}\left(376+116\,\frac{b_1}{a_1}\right), \\ A_4 &= 270\left(2+\frac{b}{a}\right)+2\,\frac{e_1 a_1}{a}\left(288+72\,\frac{b_1}{a_1}\right), \\ A_5 &= 60\left(26+7\,\frac{b}{a}\right)+2\,\frac{e_1 a_1}{a}\left(348+90\,\frac{b_1}{a_1}\right), \\ A_6 &= 520\left(2+\frac{b}{a}\right)+2\,\frac{e_1 a_1}{a}\left(\frac{1820}{3}+170\,\frac{b_1}{a_1}\right), \\ A_7 &= 816\left(2+\frac{b}{a}\right)+2\,\frac{e_1 a_1}{a}\cdot 24\left(36+8\,\frac{b_1}{a_1}\right), \\ A_8 &= 32\left(74+19\,\frac{b}{a}\right)+2\,\frac{e_1 a_1}{a}\cdot 8\left(\frac{152}{3}+12\,\frac{b_1}{a_1}\right), \\ A_9 &= 36\left(90+21\,\frac{b}{a}\right)+2\,\frac{e_1 a_1}{a}\cdot 12\left(50+11\,\frac{b_1}{a_1}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

zu setzen ist.

In dem Reihenansatz (5.1) sind die Koeffizienten d_0 und d_2 noch willkürlich. Wir verfügen über sie, indem wir vorschreiben, daß der Plattenrand eingespannt sein soll, d. h. daß für $\varrho = 1$

$$\zeta = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d\zeta}{d\varrho} = 0 \tag{5.4}$$

werden soll. Dies führt mit (5.1) auf

$$\left.\begin{aligned} d_2 &= -\left(2\,d_4 + 3\,d_6 + 4\,d_8 + \cdots\right), \\ d_0 &= -\left(d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + \cdots\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Da die Koeffizienten $d_{2i}\,(i > 2)$ von d_2 abhängen, so stellt die erste Gleichung (5.5) eine Gleichung für d_2 dar, die man mit irgend einem Näherungsverfahren zu lösen hat. Die zweite Gleichung (5.5) liefert dann vollends den Koeffizienten d_0.

Zahlenbeispiel: Mit den Werten für Aluminiumbronze[1] $K = 1{,}35 \cdot 10^6\,\mathrm{kg/cm^2}$, $G = 0{,}477 \cdot 10^6\,\mathrm{kg/cm^2}$; $\varkappa(\varepsilon_0) = 1 - 38 \cdot 10^6\,\varepsilon_0^2$, $\gamma(\varphi_0^2) = 1 - 0{,}04 \cdot 10^6\,\varphi_0^2$ erhält man für $p_0 =$

[1] *H. Kauderer*, a. a. O. S. 464.

$1{,}8\ \mathrm{t/m^2}$, $h/R = 2/100$ die Reihe

$$\zeta = 0{,}14625 - 0{,}29322\,\varrho^2 + 0{,}14889\,\varrho^4 - 0{,}003176\,\varrho^6 + 0{,}0014100\,\varrho^8 - 0{,}0001975\,\varrho^{10} + 0{,}0000789\,\varrho^{12} - 0{,}0000315\,\varrho^{14} + \cdots . \tag{5.6}$$

Dies gibt in der Plattenmitte die Durchbiegung

$$w_{\varrho=0} = 0{,}1462\,h$$

und die Biegespannung

$$\sigma_{r_{\varrho=0,\,z=\pm h/2}} = \pm\, 223{,}79\ \mathrm{kg/cm^2}\,,$$

während die Radialspannung am Plattenrand

$$\sigma_{r_{\varrho=1,\,z=\pm h/2}} = \mp\, 334{,}52\ \mathrm{kg/cm^2}$$

wird.

Würde das *Hooke*sche Gesetz gelten, so wären die entsprechenden Werte

$$w_{\varrho=0} = 0{,}1455\,h\,, \quad \sigma_{r_{\varrho=0,\,z=\pm h/2}} = \pm\, 226{,}45\ \mathrm{kg/cm^2}\,, \quad \sigma_{r_{\varrho=1,\,z=\pm h/2}} = \mp\, 337{,}50\ \mathrm{kg/cm^2}\,.$$

6. Der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit. Wir wollen jetzt zeigen, wie man den Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit gegenüber Variationen der Verschiebungen, der von *J. H. Argyris* zusammen mit einem entsprechenden Satz vom Minimum der sogenannten Ergänzungsenergie gegenüber Variationen der Spannungen für ein beliebiges nichtlineares Elastizitätsgesetz bei kleinen Verzerrungen aufgestellt worden ist[1], speziell für das hier verwendete Elastizitätsgesetz zu formulieren hat. Dieser Satz wird uns dann einen bequemeren Zugang zur Lösung der Plattenprobleme eröffnen.

Wir betrachten einen Körper, der das nichtlineare Elastizitätsgesetz befolgt. Für einige Teile S_d seiner Oberfläche S seien die Verschiebungskomponenten u_0, v_0, w_0 vorgeschrieben, während der Rest S_f seiner Oberfläche einer Belastung je Flächeneinheit mit den vorgeschriebenen Komponenten p_x, p_y, p_z ausgesetzt sei. Weiter sei angenommen, daß u, v und w die Komponenten der bei dieser Belastung wirklich eintretenden Verschiebungen seien. Mit den hierzu gehörigen Verzerrungskomponenten ist die je Volumeneinheit aufgespeicherte Formänderungsarbeit[2]

$$A(\varepsilon_0, \psi_0^2) = A_0(\varepsilon_0) + A'(\psi_0^2) = A\,(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots \psi_{yz})\,, \tag{6.1}$$

wobei die Volumenänderungsarbeit

$$A_0(\varepsilon_0) = \frac{9}{2}\,K\left[1 + 2\left(\frac{1}{3}\,\varkappa_1\,\varepsilon_0 + \frac{1}{4}\,\varkappa_2\,\varepsilon_0^2 + \cdots\right)\right] \tag{6.2}$$

und die Gestaltsänderungsarbeit

$$A'(\psi_0^2) = \frac{3}{4}\,G\,\psi_0^2\left[1 + 2\left(\frac{1}{4}\,\gamma_2\,\psi_0^2 + \frac{1}{6}\,\gamma_4\,\psi_0^4 + \cdots\right)\right] \tag{6.3}$$

zu setzen ist. Hieraus folgt für das elastische Potential V des Körpers das über das ganze Volumen des Körpers zu erstreckende Integral

$$V = \iiint A(\varepsilon_0, \psi_0^2)\,dx\,dy\,dz\,. \tag{6.4}$$

Wir variieren nun die Verschiebungen u, v, w um δu, δv, δw, wobei wir voraussetzen, daß diese Funktionen differentiierbar seien und auf S_d der Forderung

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0 \tag{6.5}$$

genügen. Mit den Verschiebungen u, v, w werden aber auch die Verzerrungen $\varepsilon_x, \ldots; \psi_y, \ldots$ variiert, und zwar um $\delta\varepsilon_x, \ldots; \delta\psi_{yz}, \ldots$, und hiermit ändert sich das elastische Potential um

$$\delta V = \int\int\int \left[\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_x}\,\delta\varepsilon_x + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \psi_{yz}}\,\delta\psi_{yz} + \cdots\right] dx\,dy\,dz\,. \tag{6.6}$$

Nun ist aber[3] (nach elementarer Zwischenrechnung)

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x\,, \ldots; \quad \frac{\partial A}{\partial \psi_{yz}} = \tau_{yz}\,, \ldots\,, \tag{6.7}$$

[1] *J. H. Argyris*, a. a. O. S. 459.
[2] *H. Kauderer*, a. a. O. 459.
[3] *H. Kauderer*, a. a. O. S. 456.

und somit wird

$$\delta V = \iiint [\sigma_x \delta\varepsilon_x + \cdots + \tau_{xy} \delta\psi\, \tau_{xy}]\, dx\, dy\, dz\,. \tag{6.8}$$

Da wir wegen der Differentiierbarkeit von δu, δv, δw

$$\delta\varepsilon_x = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \delta u}{\partial x} \tag{6.9}$$

und zyklisch weiter setzen dürfen, so folgt aus (6.8)

$$\delta V = \int\int\int \left[\sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \cdots + \tau_{xy}\left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x}\right)\right] dx\, dy\, dz\,. \tag{6.10}$$

Dieses Volumenintegral über den ganzen Körper läßt sich genau wie in der klassischen Elastizitätstheorie durch partielle Integration in den Ausdruck

$$\begin{aligned}\delta V = &- \int\int\int \left[\delta u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \cdots\right] dx\, dy\, dz + \\ &+ \int\int_S \{\delta u\, [\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z)] + \cdots\}\, d\omega\end{aligned} \tag{6.11}$$

überführen. Da für die Spannungskomponenten (mit den Komponenten X, Y, Z der Volumenkraft) die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -X \tag{6.12}$$

und zyklisch weiter und die Oberflächenbedingungen mit den Komponenten p_x, p_y, p_z der äußeren Belastung je Flächeneinheit

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z) = p_x \tag{6.13}$$

und zyklisch weiter gelten müssen, so nimmt im Hinblick auf (6.5) der Ausdruck für δV die Form

$$\delta V = \iiint [X\, \delta u + Y\, \delta v + Z\, \delta w)\, dx\, dy\, dz + \int\int_{S_f} (p_x\, \delta u + p_y\, \delta v + p_z\, \delta w)\, d\omega \tag{6.14}$$

an. Nun sollen ja die Volumenkräfte X, Y, Z und die Belastungen p_x, p_y, p_z mit den Verschiebungen nicht mitvariiert werden; wir dürfen also das Variationssymbol δ vor das Integralzeichen setzen und schreiben somit

$$\delta \left[V - \iiint [X\, u + Y\, v + Z\, w)\, dx\, dy\, dz - \int\int_{S_f} p_x\, u + p_y\, v + p_z\, w)\, d\omega\right] = 0\,. \tag{6.15}$$

Die Größe

$$P \equiv V - \iiint (X\, u + Y\, v + Z\, w)\, dx\, dy\, dz - \int\int_{S_f} (p_x\, u + p_y\, v + p_z\, w)\, d\omega \tag{6.16}$$

ist das Gesamtpotential der inneren Spannungen des festen Körpers und der äußeren an ihm wirkenden (konstant gedachten) Kräfte. Es gilt also

$$\delta P = 0\,, \tag{6.17}$$

d. h. das Gesamtpotential P hat in der Gleichgewichtsstellung einen stationären Wert gegenüber Variationen der Verschiebungen, die auf S_d verschwinden.

7. Lösung des Plattenproblems von Ziff. 5 nach dem *Ritz*schen Verfahren. Um mit Hilfe des soeben bewiesenen Satzes eine Näherungslösung für das in Ziff. 5 behandelte Kreisplattenproblem zu erhalten, setzen wir die Durchbiegung w mit unbestimmten Koeffizienten c_i $(i = 0, 1, 2 \ldots n)$ in Form einer Reihe von Funktionen w_i an, die sämtliche die Randbedingungen befriedigen:

$$w = \sum_{i=0}^{n} c_i\, w_i\,. \tag{7.1}$$

Sodann setzen wir diese Funktionen in die Gleichung für das Gesamtpotential P ein und führen die verlangten Integrationen aus. Der hierbei entstehende Ausdruck für P ist eine Funktion der unbestimmten Koeffizienten c_i. Da P im Gleichgewichtszustand ein Extremum werden muß, so bestimmen wir die Koeffizienten c_i aus den Extremalbedingungen

$$\frac{\partial P}{\partial c_i} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n)\,. \tag{7.2}$$

Wir haben also jetzt zuerst den Ausdruck für A gemäß (6.1) in den Ableitungen der Durchbiegung w darzustellen. Im Fall der dünnen Platte sind (auf Grund der Annahmen von Ziff. 3) ε_0 und φ_0 durch die Ausdrücke (3.15) und (3.16) bestimmt. Hiermit erhalten wir aus (6.1), wenn wir uns auf die einfachen Funktionen $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $\gamma(\varphi_0^2)$ gemäß (3.18) beschränken,

$$\left.\begin{aligned} A(\varepsilon_0, \varphi_0^2) &= \frac{9K}{2}\left[\varepsilon_0^2 + \alpha\,\varphi_0^2 + \frac{\gamma_2}{2}(\beta\,\varepsilon_0^4 + \alpha\,\varphi_0^4)\right] = \frac{K z^2}{2}\Big\{\delta_0\,(w_{xx}^2 + w_{yy}^2) + \delta_1\,w_{xx}\,w_{yy} + \\ &+ 24\,\alpha\,w_{xy}^2 + \frac{z^2}{9}\,\frac{\gamma_2}{2}\,[\delta_2\,(w_{xx}^4 + w_{yy}^4) + \delta_3\,w_{xx}^2\,w_{yy}^2 + \delta_4\,w_{xx}\,w_{yy}\,(w_{xx}^2 + w_{yy}^2) + \\ &+ 9\cdot 64\,\alpha\,w_{xy}^4 + 6\cdot 64\,\alpha\,w_{xy}^2\,(l_1\,w_{xx}^2 + l_1\,w_{yy}^2 - l_2\,w_{xx}\,w_{yy})]\Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{6}\,\frac{G}{K}, \qquad \beta = \frac{\varkappa_2}{\gamma_2}, \\ \delta_0 &= (1-\eta)^2 + 8\,\alpha\,l_1, \\ \delta_1 &= 2\,(1-\eta)^2 - 8\,\alpha\,l_2, \\ \delta_2 &= \beta\,(1-\eta)^4 + 64\,\alpha\,l_1^2, \\ \delta_3 &= 6\,\beta\,(1-\eta)^4 + 64\,\alpha\,(2\,l_1^2 + l_2^2), \\ \delta_4 &= 2\,[2\,\beta\,(1-\eta)^4 - 64\,\alpha\,l_1\,l_2] \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

gesetzt ist. Die Abkürzungen l_1, l_2 und η sind schon in (3.13) und (3.17) definiert.

Für eine axialsymmetrische Kreisplatte folgt somit in Polarkoordinaten

$$A(\varepsilon_0, \varphi_0^2) = \frac{K z^2}{2}\left\{\delta_0\left(w_{rr}^2 + \frac{1}{r^2}\,w_r^2\right) + \delta_1\,\frac{1}{r}\,w_r\,w_{rr} + \frac{z^2}{9}\,\frac{\gamma^2}{2}\left[\delta_2\left(w_{rr}^4 + \frac{1}{r^4}\,w_r^4\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \delta_3\,\frac{1}{r^2}\,w_{rr}^2\,w_r^2 + \delta_4\,\frac{1}{r}\,w_r\,w_{rr}\left(w_{rr}^2 + \frac{1}{r^2}\,w_r^2\right)\right]\right\}. \tag{7.5}$$

Führen wir die Integration über die Dicke aus und setzen wieder $\zeta = w/h$, $\varrho = r/R$, so folgt aus (7.5)

$$\int_{-h/2}^{+h/2} A(\varepsilon_0, \varphi_0^2)\,dz = \frac{K}{24}\,h\left(\frac{h}{R}\right)^4\left[J_1 + \frac{\gamma_2}{120}\left(\frac{h}{R}\right)^4 J_2\right], \tag{7.6}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \delta_0\left(\zeta_{\varrho\varrho}^2 + \frac{1}{\varrho^2}\,\zeta_\varrho^2\right) + \delta_1\,\frac{1}{\varrho}\,\zeta_\varrho\,\zeta_{\varrho\varrho}, \\ J_2 &= \delta_2\left(\zeta_{\varrho\varrho}^4 + \frac{1}{\varrho^4}\,\zeta_\varrho^4\right) + \delta_3\,\frac{1}{\varrho^2}\,\zeta_\varrho^2\,\zeta_{\varrho\varrho}^2 + \delta_4\,\frac{1}{\varrho}\,\zeta_\varrho\,\zeta_{\varrho\varrho}\left(\zeta_{\varrho\varrho}^2 + \frac{1}{\varrho^2}\,\zeta_\varrho^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

ist. Dann wird das elastische Potential V des ganzen Körpers

$$V = \int\int\int A(\varepsilon_0, \varphi_0^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{K}{24}\,h\left(\frac{h}{R}\right)^4\int\int\left[J_1 + \frac{\gamma_2}{120}\left(\frac{h}{R}\right)^4 J_2\right]d\omega\,. \tag{7.8}$$

Mit

$$d\omega = 2\,\pi\,R^2\,\varrho\,d\varrho \tag{7.9}$$

folgt aus (7.8)

$$V = 2\,\pi\,R^2\,\frac{K}{24}\,h\left(\frac{h}{R}\right)^4\int_0^1\left[J_1 + \frac{\gamma_2}{120}\left(\frac{h}{R}\right)^4 J_2\right]\varrho\,d\varrho\,. \tag{7.10}$$

Für den Fall des eingespannten Plattenrandes und einer gleichförmigen Belastung p_0 sei $\zeta = w/h$ in der Gestalt

$$\zeta = c_0\,(1-\varrho^2)^2 \tag{7.11}$$

angesetzt, die für jeden Wert der noch offenen Konstanten c_0 die Randbedingungen (5.4) erfüllt und stets eine zur Durchbiegung beim *Hooke*schen Gesetz proportionale Durchbiegung liefert.

Das Potential der äußeren Belastung wird

$$-W = -\int\int p_0\,w\,d\omega = -2\,\pi\,R^2\,h\,p_0\int_0^1\zeta\,\varrho\,d\varrho \tag{7.12}$$

oder, wenn man (7.11) einsetzt und integriert,

$$W = 2\pi R^2 h \frac{c_0}{6} p_0 . \tag{7.13}$$

Da in diesem Fall

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\varrho} \zeta_\varrho \zeta_{\varrho\varrho} \varrho \, d\varrho &= \frac{1}{2} \zeta_\varrho^2 \Big|_0^1 = 0 , \\ \int_0^1 \frac{1}{\varrho} \zeta_\varrho \zeta_{\varrho\varrho} \left(\zeta_{\varrho\varrho}^2 + \frac{1}{\varrho^2} \zeta_\varrho^2 \right) \varrho \, d\varrho &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

ist, so folgt aus (7.10)

$$V = 2\pi R^2 h \frac{K}{24} \left(\frac{h}{R} \right)^4 \left[\frac{32}{3} \delta_0 c_0^2 + \frac{\gamma_2}{120} \left(\frac{h}{R} \right)^4 256 \, (1{,}2\, \delta_2 + 0{,}0667\, \delta_3) \, c_0^4 \right] . \tag{7.15}$$

Geht man hiermit in (6.16) ein, so folgt für das Gesamtpotential

$$P = 2\pi R^2 h \frac{K}{24} \left(\frac{h}{R} \right)^4 \left[\frac{32}{3} \delta_0 c_0^2 + \frac{\gamma^2}{120} \left(\frac{h}{R} \right)^4 256 \, (1{,}2\, \delta_2 + 0{,}0667\, \delta_3) \, c_0^4 \right] - 2\pi R^2 h \, p_0 \frac{c_0}{6} . \tag{7.16}$$

Die Bedingung $\partial P / \partial c_0 = 0$ liefert somit die folgende Gleichung dritten Grades für c_0:

$$\frac{K}{24} \left(\frac{h}{R} \right)^4 \left[\frac{64}{3} \delta_0 c_0 + \frac{\gamma_2}{30} \left(\frac{h}{R} \right)^4 (1{,}2\, \delta_0 + 0{,}0667\, \delta_3) \, c_0^3 \right] = \frac{p_0}{6} . \tag{7.17}$$

Als Beispiel seien wieder, wie in Ziff. 5, die Zahlwerte für Aluminiumbronze gewählt und $p_0 = 1{,}8\ \mathrm{t/m^2}$, $h/R = 2/100$ gesetzt. Hiermit folgt

$$c_0 = 0{,}1455 + 0{,}2318\, c_0^3 \quad \text{oder} \quad c_0 = 0{,}1462 .$$

Somit erhält man für die Durchbiegung der Platte in der Mitte den Näherungswert $w_{\varrho=0} = 0{,}1462\, h$ und für die Spannungen die Werte $\sigma_{r\,\varrho=0,\, z=\pm h/2} = \pm 223{,}21\ \mathrm{kg/cm^2}$, $\sigma_{r\,\varrho=1,\, z=\pm h/2} = 334{,}52\ \mathrm{kg/cm^2}$.

8. Lösung des Plattenproblems nach dem Verfahren von *Galerkin*. Es sei $w(x, y)$ die zu vorgeschriebenen Randbedingungen gesuchte Lösung der Plattengleichung (4.6), die wir jetzt kurz in der Form

$$\frac{p}{D} = M[w] \tag{8.1}$$

schreiben wollen, wobei $D = G h^3/12$ eine Konstante und $M[w]$ den in den Ableitungen von w nach r nichtlinearen Ausdruck auf der rechten Seite von (4.6) bedeutet. Denken wir uns nun der Platte eine zusätzliche virtuelle Durchbiegung δw erteilt, und zwar so, daß auch $w + \delta w$ die Randbedingungen erfüllt, so können wir die hierbei zu leistende Arbeit auf zwei verschiedene Arten berechnen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) als Arbeit der äußeren Belastung:} \quad \iint p \, \delta w \, d\omega , \\ &\text{b) als Arbeit der inneren Spannungen:} \quad \iint D \, M[w] \, \delta w \, d\omega . \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Da nun aber die Funktion w die Lösung unseres Problems liefern soll, so gilt für jede virtuelle Verschiebung der Plattenmittelfläche

$$\iint D \, M[w] \, \delta w \, d\omega = \iint p \, \delta w \, d\omega \tag{8.3}$$

oder auch

$$\int \int \left(M[w] - \frac{p}{D} \right) \delta w \, d\omega = 0 . \tag{8.4}$$

Setzen wir nun eine Näherungslösung in Form einer Reihe

$$\overline{w} = \sum_{i=0}^{n} c_i w_i \tag{8.5}$$

mit noch unbestimmten Koeffizienten c_i an, in der die Koordinatenfunktionen w_i sämtliche Randbedingungen erfüllen, so werden wir zwar nicht mehr verlangen können, daß die Gleichung (8.4) mit $\overline{w}$ an Stelle von w für beliebige virtuelle Verschiebungen erfüllt wird; wir wollen aber

wenigstens fordern, daß sie sich für alle diejenigen virtuellen Verschiebungen erfüllen läßt, die sich mit beliebigen Konstanten δc_i in der Form

$$\delta \overline{w} = \sum_{0}^{n} w_i \, \delta c_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{8.6}$$

darstellen lassen, das heißt also, daß

$$\int\int \left(M[\overline{w}] - \frac{p}{D} \right) (w_0 \, \delta c_0 + w_1 \, \delta c_1 + \cdots + w_n \, \delta c_n) \, d\omega = 0 \tag{8.7}$$

gilt. Da die δc_i noch beliebig sein können, läßt sich diese Forderung nur dann erfüllen, wenn für sämtliche $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\int\int \left(M[\overline{w}] - \frac{p}{D} \right) w_i \, d\omega = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{8.8}$$

wird. Die Koeffizienten c_i werden nun durch die Gleichungen (8.8), in denen sie in nichtlinearer Form auftreten werden, bestimmt.

Für das Plattenproblem von Ziff. 5 setzen wir speziell $\overline{\zeta} = \overline{w}/h$ in der folgenden Form an:

$$\overline{\zeta} = c_0 (1 - 2\varrho^2 + \varrho^4) + c_1 (2 - 3\varrho^2 + \varrho^6), \tag{8.9}$$

wobei die Funktionen $1 - 2\varrho^2 + \varrho^4$ und $2 - 3\varrho^2 + \varrho^6$ die Randbedingungen erfüllen und überdies $f_0 \cdot (1 - 2\varrho^2 + \varrho^4)$ die Lösung der linearen Theorie sei. Gehen wir mit (8.9) und (4.10) in (8.8) ein, so ergibt sich für $i = 1$ folgende Gleichung dritten Grades zwischen c_0 und c_1, in der a_1, b_1, e, a, b durch (3.21) und (3.23) sowie μ durch (4.9) definiert sind:

$$\begin{aligned} 0{,}9 \, c_1 = -4\mu \Bigg\{ & \left[3{,}4 - 0{,}3 \frac{b}{a} + \frac{e_1 a_1}{a} \left(-0{,}2 + 0{,}5 \frac{b_1}{a_1} \right) \right] c_0^3 + \\ & + \left[26{,}657 - 2{,}1 \frac{b}{a} + \frac{e_1 a_1}{a} \left(-2{,}571 + 2{,}914 \frac{b_1}{a_1} \right) \right] c_0^2 c_1 + \\ & + \left[70{,}939 - 5{,}0305 \frac{b}{a} + \frac{e_1 a_1}{a} \left(-8{,}42 + 5{,}882 \frac{b_1}{a_1} \right) \right] c_0 c_1^2 + \\ & + \left[63{,}771 - 4{,}114 \frac{b}{a} + \frac{e_1 a_1}{a} \left(-8{,}229 + 14{,}114 \frac{b_1}{a_1} \right) \right] c_1^3 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Eine weitere derartige Gleichung würden wir aus (8.8) erhalten, und aus dem System dieser beiden Gleichungen wäre c_0 und c_1 zu bestimmen. Wir befriedigen jedoch dieses Gleichungssystem nur näherungsweise, indem wir für c_0 den Wert f_0 einsetzen, den die lineare Theorie liefert, und c_1 aus der Gleichung (8.10) bestimmen.

Diese Gleichung lautet für die Konstanten, die in Ziff. 5 für Aluminiumbronze angenommen worden waren,

$$0{,}9 \, c_1 = -4\mu \, (3{,}53849 f_0^3 + 25{,}39872 f_0^2 c_1 + 64{,}473 f_0 c_1^2 + 72{,}61 c_1^3). \tag{8.11}$$

Setzen wir, wie im Zahlenbeispiel von Ziff. 5, $p_0 = 1{,}8 \text{ t/m}^2$, $h/R = 2/100$, so liefert (8.10) den Wert $c_1 = 0{,}000306$, und wir erhalten für die Durchbiegung in der Mitte $w_{\varrho=0} = 0{,}1461 h$ und für die Spannungen die Werte

$$\sigma_{r_{\varrho=0,\, z=\pm h/2}} = \pm 223{,}98 \text{ kg/cm}^2, \qquad \sigma_{r_{\varrho=1,\, z=\pm h/2}} = \mp 334{,}41 \text{ kg/cm}^2.$$

9. Kritik der Ergebnisse. Die Ergenisse der Zahlenbeispiele aus den Ziffern 5, 7 und 8 für Aluminiumbronze mit $p_0 = 1{,}8 \text{ t/m}^2$, $h/R = 2/100$ sind in Tabelle 1 zusammengestellt. In dieser Tabelle sind überdies noch die Zahlwerte der linearen Theorie aufgeführt.

Tabelle 1

	$w_{\varrho=0}$	$\sigma_{r_{\varrho=0,\, z=\pm h/2}}$ kg/cm²	$\sigma_{r_{\varrho=1,\, z=\pm h/2}}$ kg/cm²
Lineare Theorie	0,1455 h	$\pm$ 226,45	$\mp$ 337,50
Reihe	0,1462 h	$\pm$ 223,79	$\mp$ 334,52
Ritz (7.11)	0,1462 h	$\pm$ 223,21	$\mp$ 334,22
Galerkin (8.9)	0,1461 h	$\pm$ 223,98	$\mp$ 334,41

Die Abweichung von der linearen Theorie ist allerdings noch gering. Um sie deutlicher zu machen, wurden die Rechnungen auch noch für den doppelten Wert der Belastung, also $p = 3{,}6\ \mathrm{t/m^2}$ durchgeführt, die Ergebnisse zeigt Tabelle 2.

Tabelle 2

	$w_{\varrho=0}$	$\sigma_{r_{\varrho=0,\,z=\pm h/2}}$ kg/cm²	$\sigma_{r_{\varrho=1,\,z=\pm h/2}}$ kg/cm²
Lineare Theorie	0,2900 h	$\pm$ 452,90	$\mp$ 675,00
Ritz (7.11)	0,2971 h	$\pm$ 421,82	$\mp$ 643,67
Galerkin (8.9)	0,2961 h	$\pm$ 419,35	$\mp$ 646,62
Galerkin (7.11)	0,2971 h	$\pm$ 421,82	$\mp$ 643,67

Hierbei sind außerdem die Werte aufgeführt, die man mit dem Verfahren von *Galerkin* erhält, wenn man den nur aus einem Glied bestehenden Ansatz (7.11) für $\bar{\zeta}$ benützt, der beim *Ritz*schen Verfahren verwendet worden war. Das aus der Theorie der Variationsmethoden zu erwartende Ergebnis, daß man mit dem gleichen Ansatz (7.11) beim *Ritz*schen und beim *Galerkin*schen Verfahren die gleichen Näherungswerte erhält, stellt sich hier deshalb nicht ein, weil in der zum *Galerkin*schen Verfahren benötigten Plattengleichung der Näherungsansatz (3.20) für die dort auftretende Hilfsfunktion t steckt, während man bei der Aufstellung des Gesamtpotentials für das *Ritz*sche Verfahren von einer solchen Näherung keinen Gebrauch macht. Die trotzdem gute Übereinstimmung der Ergebnisse ist also eine Rechtfertigung der durch (3.20) getroffenen Näherungsannahme.

Wir können aus den Tabellenwerten folgende Schlüsse ziehen:

1) Die Energiemethode nach dem Verfahren von *Ritz* liefert hinreichend genaue Ergebnisse.

2) Die Näherung (3.21) für die Hilfsfunktion t, bei der wir in dem Ausdruck (3.19) nur die beiden ersten Glieder der Reihenentwicklung berücksichtigt haben, ist brauchbar.

3) Die Abweichung der Verschiebungen vom Ergebnis der linearen Theorie bleibt so gering, daß der einfache Näherungsansatz (7.11), bei dem die Verschiebungen bei nichtlinearer Theorie proportional zu den Verschiebungen bei linearer Theorie gewählt worden sind, durchaus gerechtfertigt ist.

10. Das *Ritz*sche Verfahren für eine einfache Annahme über die Verschiebungen. Die letzte Bemerkung von Ziff. 9 veranlaßt uns, einmal ganz allgemein zu untersuchen, wie man mit einem Näherungsansatz für die Verschiebungskomponenten von der Form

$$u = c\,\bar{u}\,, \qquad v = c\,\bar{v}\,, \qquad w = c\,\bar{w} \tag{10.1}$$

in dem u, v, w die entsprechenden (als bekannt vorausgesetzten) Verschiebungen der linearen Theorie sind, die Konstante c mit Hilfe der *Ritz*schen Methode aus dem Prinzip vom Minimum der Formänderungsarbeit bestimmen kann.

Vorweg sei bemerkt, daß dieser Ansatz, der ja die Bedingung (6.5) erfüllen muß, nur erlaubt ist, wenn die Bedingungen, die auf dem Oberflächenteil S_d für die Verschiebungen gestellt werden, sich durch Gleichungen ausdrücken lassen, die in u, v, w und den Ableitungen linear und homogen sind.

Bezeichnen wir jetzt auch die entsprechenden Verzerrungsgrößen der linearen Theorie durch Überstreichen, so folgen aus (10.1) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = c\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = c\,\bar{\varepsilon}_x\,, \\ \psi_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = c\,\bar{\psi}_{yz} \end{aligned}\right| \tag{10.2}$$

und zyklisch weiter und dann aus (2.2)

$$\varepsilon_0 = c\,\bar{\varepsilon}_0\,, \qquad \psi_0^2 = c^2\,\bar{\psi}_0^2\,. \tag{10.3}$$

Gehen wir hiermit in (6.1) und (6.2) ein, so ergibt sich für die Formänderungsarbeit je Volumeneinheit

$$A = A_0(c\,\bar{\varepsilon}_0) + A'(c\,\bar{\psi}_0^2)\,, \tag{10.4}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} A_0(c\,\bar{\varepsilon}_0) &= 9\,K\left[\frac{1}{2}c^2\,\bar{\varepsilon}_0^2+\frac{1}{3}\varkappa_1 c^3\,\bar{\varepsilon}_0^3+\frac{1}{4}\varkappa_2 c^4\,\bar{\varepsilon}_0^4+\cdots\right], \\ A'(c\,\bar{\psi}_0^2) &= \frac{3}{4}G\left[c^2\,\bar{\psi}_0^2+\frac{1}{2}\gamma_2 c^4\,\bar{\psi}_0^4+\frac{1}{3}\gamma_4 c^6\,\bar{\psi}_0^6+\cdots\right] \end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

zu setzen ist. Führen wir nun (10.4) in den Ausdruck (6.16) für das Gesamtpotential P ein, leiten diesen nach c ab und setzen die Ableitung gleich Null, so erhalten wir bei fehlenden Volumenkräften X, Y, Z die folgende Gleichung für c:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{S_f}\int\limits\left[p_x\,\bar{u}+p_y\,\bar{v}+p_z\,\bar{w}\right]d\omega=\int\int\limits_{V}\int\left[\left(9\,K\frac{\bar{\varepsilon}_0^2}{2}+\frac{3}{4}G\,\bar{\psi}_0^2\right)c+9\,K\varkappa_1\frac{\bar{\varepsilon}_0^3}{2}c^2+\right.$$
$$\left.+\left(9\,K\frac{\bar{\varepsilon}_0^4}{2}\varkappa_2+\frac{3}{4}G\,\gamma_2\,\bar{\psi}_0^4\right)c^3+9\,K\varkappa_3\frac{\bar{\varepsilon}_0^5}{2}c^4+\cdots\right]dx\,dy\,dz\,, \tag{10.6}$$

aus der diese Konstante zu berechnen ist. (Im allgemeinen wird dies nur mittels eines Näherungsverfahrens möglich sein.) Kann man die Dehnungsfunktion $\varkappa(\varepsilon_0)$ und die Scherungsfunktion $\gamma(\psi_0^2)$ speziell in der Form (3.18) annehmen, so liefert (10.6) eine Gleichung dritten Grades für c

$$c=\frac{\int\limits_{S_f}\int\left[p_x\,\bar{u}+p_y\,\bar{v}+p_z\,\bar{w}\right]d\omega}{9\,K\int\int\int\left[\bar{\varepsilon}_0^2+\alpha\,\bar{\psi}_0^2\right]dx\,dy\,dz}-c^3\,\gamma_2\frac{\int\int\int\left[\beta\,\bar{\varepsilon}_0^4+\alpha\,\bar{\psi}_0^4\right]dx\,dy\,dz}{\int\int\int\left[\bar{\varepsilon}_0^2+\alpha\,\bar{\psi}_0^2\right]dx\,dy\,dz}\,. \tag{10.7}$$

in der zur Abkürzung

$$\alpha=\frac{1}{6}\frac{G}{K}\,,\qquad \beta=\frac{\varkappa_2}{\gamma_2} \tag{10.8}$$

gesetzt worden ist.

Da $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ die exakten Lösungen der linearen Theorie sein sollen, so wird der erste Quotient in (10.7) gleich Eins; denn sein Zähler stellt die doppelte Arbeit der äußeren Belastung und sein Nenner das doppelte elastische Potential des Körpers dar, wenn dieser dem *Hooke*schen Gesetz gehorcht. Wir erhalten also einfacher

$$c=1-c^3\,\gamma_2\frac{\int\int\int\left[\beta\,\bar{\varepsilon}_0^4+\alpha\,\bar{\psi}_0^4\right]dx\,dy\,dz}{\int\int\int\left[\bar{\varepsilon}_0^2+\alpha\,\bar{\psi}_0^2\right]dx\,dy\,dz}\,. \tag{10.9}$$

Speziell für Plattenprobleme ergibt sich aus (10.7) mit (3.15) und (3.16)

$$c=\frac{\int\int p\,\bar{w}\,d\omega}{K\dfrac{h^3}{12}E_L}-c^3\,\gamma_2\frac{h^2}{60}\frac{E_N}{E_L}\,, \tag{10.10}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} E_L &= \int\int\left\{\delta_0\left[\bar{w}_{xx}^2+\bar{w}_{yy}^2\right]+\delta_1\,\bar{w}_{xx}\,\bar{w}_{yy}+24\,\alpha\,\bar{w}_{xy}^2\right\}d\omega\,, \\ E_N &= \int\int\left\{\delta_2\left[\bar{w}_{xx}^4+\bar{w}_{yy}^4\right]+\delta_3\,\bar{w}_{xx}^2\,\bar{w}_{yy}^2+\delta_4\,\bar{w}_{xx}\,\bar{w}_{yy}\left[\bar{w}_{xx}^2+\bar{w}_{yy}^2\right]+9\cdot 64\,\alpha\,w_{xy}^4+\right. \\ &\quad \left.+6\cdot 64\,\alpha\,\bar{w}_{xy}^2\left[l_1\left(\bar{w}_{xx}^2+\bar{w}_{yy}^2\right)-l_2\,\bar{w}_{xx}\,\bar{w}_{yy}\right]\right\}d\omega \end{aligned}\right\} \tag{10.11}$$

zu setzen ist und die Konstanten $\delta_0 \ldots \delta_4, l_1, l_2$ durch (7.4) und (3.17) bestimmt sind.

Wir zeigen die Anwendung des Verfahrens noch an einem weiteren Beispiel, nämlich der Kreisplatte vom Halbmesser R mit eingespanntem Rand unter parabolischer Lastverteilung

$$p=q_0\,(1-\varrho^2)\quad\text{mit}\quad \varrho=r/R\,. \tag{10.12}$$

Für diesen Fall drücken wir E_L und E_N in Polarkoordinaten aus:

$$\left.\begin{aligned} E_L &= \int\int\left[\delta_0\left(\bar{w}_{rr}^2+\frac{1}{r^2}\bar{w}_r^2\right)+\delta_1\frac{1}{r}\,\bar{w}_r\,\bar{w}_{rr}\right]d\omega\,, \\ E_N &= \int\int\left[\delta_2\left(\bar{w}_{rr}^4+\frac{1}{r^4}\bar{w}_r^4\right)+\delta_3\,\bar{w}_{rr}^2\frac{1}{r^2}\bar{w}_r^2+\delta_4\frac{1}{r}\,\bar{w}_r\,\bar{w}_{rr}\left(\bar{w}_{rr}^2+\frac{1}{r^2}\bar{w}_r^2\right)\right]d\omega\,. \end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

Der Ansatz für die Durchbiegung w wird hier

$$w=c\,h\,f_0\,(7-15\,\varrho^2+9\,\varrho^4-\varrho^6)\,. \tag{10.14}$$

Gehen wir hiermit und mit (10.13) in die Gleichung (10.10) ein so ergibt sich, wenn wir wieder die Materialkonstanten für Aluminiumbronze annehmen und $q_0=12{,}15\ \mathrm{t/m^2}$, $h/R=3/100$

wählen,

$$c = 1 + 0{,}02136\, c^3 \quad \text{oder} \quad c = 1{,}022\,.$$

Die Durchbiegung in der Mitte wird

$$w_{\varrho=0} = 0{,}15505\, h\,,$$

und die Spannungen werden

$$\sigma_{r_{\varrho=0,\, z=\pm h/2}} = \pm\, 493{,}06\ \text{kg/cm}^2, \qquad \sigma_{r_{\varrho=1,\, z=\pm h/2}} = \mp\, 647{,}24\ \text{kg/cm}^2\,.$$

Die lineare Theorie hätte die folgenden Werte geliefert:

$$w_{\varrho=0} = 0{,}1517\, h\,, \qquad \sigma_{r_{\varrho=0,\, z=\pm h/2}} = \pm\, 566{,}06\ \text{kg/cm}^2\,, \qquad \sigma_{r_{\varrho=1,\, z=\pm h/2}} = \pm\, 674{,}92\ \text{kg/cm}^2.$$

11. Schlußbemerkungen. Am Problem der Plattenbiegung wurde versucht, drei verschiedene Verfahren zur Lösung der Grundgleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie kleiner Verzerrungen anzuwenden. Das erste Verfahren, das auf eine Reihenentwicklung der Lösung abzielt, könnte zwar theoretisch Ergebnisse beliebig großer Genauigkeit liefern; für die praktische Anwendung ist es jedoch wegen der schlechten Konvergenz der Reihen nicht zu empfehlen. Die Näherungsverfahren von *Ritz* und *Galerkin* arbeiten wesentlich bequemer und liefern im Rahmen der erforderlichen Genauigkeit gute Ergebnisse. Die Anwendbarkeit dieser Näherungsverfahren ist durchaus nicht auf Plattenprobleme beschränkt; sie lassen sich vielmehr überall da brauchen, wo die Lösung des Elastizitätsproblems für das *Hooke*sche Gesetz bekannt ist. Die naheliegende Annahme, daß die Verschiebungen zu denjenigen bei linearer Theorie proportional sind, macht die Handhabung des *Ritz*schen Verfahrens sehr einfach; sie dürfte ganz allgemein bei zahlreichen Problemen der nichtlinearen Elastizitätstheorie als ein Weg zu empfehlen sein, auf dem man mit relativ wenig Mühe den Einfluß der Nichtlinearität im elastischen Verhalten der Werkstoffe gut abschätzen kann.

Zu den Zahlenergebnissen für die Spannungen sei noch darauf hingewiesen, daß auch hier wieder der bei vielen schon behandelten Problemen[1] beobachtete Effekt eintritt, daß die Spannungsspitzen gegenüber ihren Werten beim *Hooke*schen Gesetz abgebaut werden.

(Eingegangen am 5. September 1955)

Anschrift des Verfassers: Dr. *K. Özden*, Stuttgart-N., Nordbahnhofstr. 133/III.

[1] Vgl. etwa *H. Kauderer*, a. a. O. ; *F. Jindra*, Ing.-Arch. 22 (1954) S. 121 u. 411; 23 (1955) S. 122.

Zur Berechnung der Strömung durch Voith-Schneider-Propeller

Von W.-H. Isay

1. Einleitung. In meiner vorangehenden Arbeit[1] habe ich eine Theorie zur Berechnung der Strömung durch einen Voith-Schneider-Propeller entwickelt, allerdings zunächst unter Beschränkung auf kleine Fortschrittsgrade; denn für diese war die Darstellung der hinter dem Propeller abfließenden freien Wirbelverteilungen anschaulich abgeleitet worden. In der vorliegenden Arbeit werden wir sehen, daß die in der oben genannten ersten Arbeit entwickelte Theorie auch für beliebige Fortschrittsgrade anwendbar ist und vernünftige Ergebnisse liefert. Es sei hier noch bemerkt, daß vom Leser der vorliegenden Arbeit die Kenntnis der ersten Arbeit vorausgesetzt wird, deren Formelsystem wir hier weiter ohne neue Erklärung verwenden. Und zwar soll bei Hinweisen im Text z. B. bedeuten: (8) = Formel (8) der vorliegenden Arbeit; (I,8) = Formel (8) der ersten Arbeit.

2. Das Geschwindigkeitsfeld der freien Wirbel. In der ersten Arbeit hatten wir bei der Betrachtung der hinter dem Propeller abfließenden freien Wirbel zunächst so getan, als ob die einzelnen Wirbelelemente ungestört mit der Anströmgeschwindigkeit nach hinten abflössen, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Auf diese Weise kamen wir zu zykloidenförmigen Kurven, auf denen die abfließenden freien Wirbel angeordnet sind. Diese vereinfachten wir dann durch eine heuristische Betrachtung zu kreisförmigen Wirbelverteilungen. Durch diese Vereinfachung ergab sich die Möglichkeit, ein übersichtliches auch für numerische Rechnungen geeignetes Formelsystem zu entwickeln.

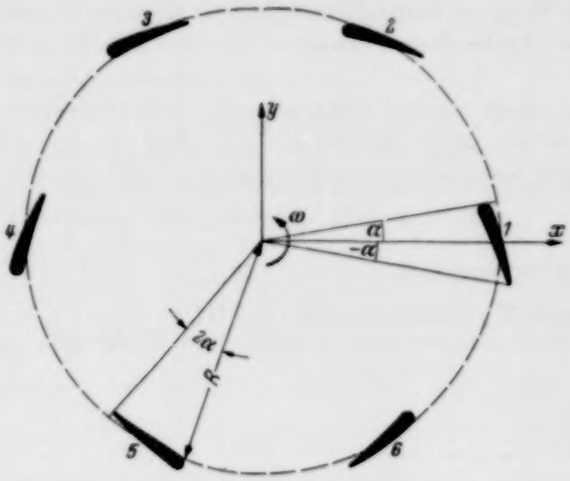


Abb. 1.

Man könnte meinen, im Falle größerer Fortschrittsgrade nun doch mit der „strengen" Formel der zykloidenförmigen Wirbelverteilungen arbeiten zu müssen. Jedoch gibt diese für die mathematische Berechnung höchst unangenehme Formel in Wirklichkeit keineswegs eine richtige Darstellung der hinter dem Propeller abfließenden freien Wirbel. Denn deren gegenseitige Beeinflussung und Vermischung bleibt unberücksichtigt. Deshalb lassen wir diese Formel auch in Zukunft beiseite. In Wahrheit ist der Abfluß der freien Wirbelverteilungen hinter einem Voith-Schneider-Propeller ein so komplizierter Vorgang, daß seine strenge mathematische Erfassung aussichtslos erscheint.

Es kommt also darauf an, eine Ersatzdarstellung zu finden, die physikalisch vernünftig und zugleich für numerische Berechnungen verwendbar ist. Dazu gehen wir folgendermaßen vor.

Für die Betrachtung der sich ablösenden freien Wirbel ersetzen wir den Voith-Schneider-Propeller mit sechs Flügeln (Abb. 1) durch eine über den ganzen Propellerumfang verteilte äquivalente Zirkulationsdichte, die die abgehenden freien Wirbel erzeugt.

Ein Propellerflügel hat an der Stelle $\omega t = \vartheta$ der Kreisbahn die Gesamtzirkulation

$$R \int_{-\alpha}^{\alpha} \gamma\left(\psi, \frac{\vartheta}{\omega}\right) d\psi = R\,\Gamma\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right).$$

Zu jedem Propellerflügel gehört vor und hinter seinem Mittelpunkt ein Bereich von $+\pi/6$ bzw. $-\pi/6$ der Kreisbahn bis zum Bereich des nächsten Propellerflügels. Das bedeutet, daß dem Bereich jedes Propellerflügels und somit auch dem ganzen Umfang der Propellerkreisbahn die

[1] *W.-H. Isay*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 379.

Zirkulationsdichte [1]

$$\frac{R\,\Gamma\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)}{R\,\frac{\pi}{3}} \approx \Gamma\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)$$

zukommt. Dann stellen wir die hinter dem Propeller abfließenden freien Wirbel durch eine kontinuierliche Folge von Kreiswirbelverteilungen der Dichte $-\frac{1}{\omega}\dot{\Gamma}\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)d\vartheta$ dar $(0 \leq \vartheta \leq 2\pi)$. Das Geschwindigkeitsfeld der hinter dem Propeller abfließenden freien Wirbel ist damit in einem beliebigen Punkte $z = r\,e^{i\varphi}$ gegeben durch

$$u_f - i\,v_f = -\frac{i}{2\,\pi\,\omega}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\dot{\Gamma}\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)d\vartheta\,dx}{re^{i\varphi} - Re^{i\vartheta} - x}. \tag{1}$$

Das ist aber genau unsere alte Formel (I,3), die wir nun für beliebige Fortschrittsgrade weiter benutzen.

3. Weitere Zahlenbeispiele. In diesem Abschnitt werden wir die Berechnungsergebnisse von drei weiteren Beispielen mit größeren Fortschrittsgraden und anderen Steigungen der Propellerflügel mitteilen.

Sie wurden genau nach der in der ersten Arbeit entwickelten Theorie durchgerechnet [2], so daß wir uns kürzer fassen werden.

Das Zahlenbeispiel aus der ersten Arbeit bezeichnen wir jetzt als

Beispiel 1. Zu diesem Beispiel soll noch die Berechnung des Drehmomentes um den Mittelpunkt des Propellerkreises nachgeholt werden, die in Arbeit I nicht durchgeführt wurde.

Das Drehmoment der am einzelnen Propellerflügel wirkenden Kraft ist gegeben durch

$$M = K_y\,R\cos\Phi - K_x\,R\sin\Phi \tag{2}$$

mit Φ als Koordinate des Druckmittelpunktes, d. h. des Angriffspunktes der Kraft am Propellerflügel (vgl. Ziff. 8 der Arbeit I).

Das Drehmoment $M^{(P)}$ des Gesamtpropellers setzt sich dann additiv aus den Momenten der einzelnen Flügel zusammen.

Schließlich definieren wir noch durch den Ausdruck

$$\eta = \frac{K^{(P)}\,u_0}{M^{(P)}\,\omega} \tag{3}$$

den Wirkungsgrad des Propellers.

Im Falle des Beispiels 1 ergibt sich folgende Tabelle 1:

Tabelle 1

Mittelpunkt des Flügelprofils	M	Mittelpunkt des Flügelprofils	M	Mittelpunkt des Flügelprofils	M	Mittelpunkt des Flügelprofils	M
0	− 2,03	$\frac{\pi}{2}$	+ 1,49	π	− 4,14	$\frac{3\pi}{2}$	+ 0,10
$\frac{\pi}{6}$	− 2,14	$\frac{2\pi}{3}$	− 0,30	$\frac{7\pi}{6}$	− 2,88	$\frac{5\pi}{3}$	− 1,23
$\frac{\pi}{3}$	− 0,23	$\frac{5\pi}{6}$	− 3,25	$\frac{4\pi}{3}$	− 0,86	$\frac{11\pi}{6}$	− 1,54

M ist dabei in Einheiten von $\varrho\,u_0^2\,R^2$ angegeben.

[1] Hier haben wir näherungsweise $\pi/3$ durch 1 ersetzt; dazu erinnern wir daran, daß ja eigentlich die Gesamtzirkulation des Propellerflügels $R\sqrt{1 + (r'/R)^2}\;\Gamma(t)$ ist, wobei die Wurzel im Durchschnitt etwa den Wert 1,03 haben dürfte.

[2] Bei der Durchführung der zahlreichen für die vorliegende Arbeit notwendigen numerischen Rechnungen haben mich Fräulein *Renate Schälicke* sowie Herr *Helm* (beide Rechner bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin) in dankenswerter Weise unterstützt.

Als Mittelwert der beiden Propellerstellungen 0 und $\pi/6$ ergibt sich somit das Propellerdrehmoment

$$M^{(P)} = -\,8{,}50\,\varrho\,u_0^2\,R^2\,,$$

Für die Berechnung des Wirkungsgrades ist das Minuszeichen ohne Bedeutung. Es war (vgl. Arbeit I) $K^{(P)} = 69{,}84\,\varrho\,u_0^2\,R$. Somit wird nach (3)

$$\eta = \frac{69{,}84}{16 \cdot 8{,}50} = 0{,}51\,.$$

Die drei nun folgenden Beispiele werden wir gleich zusammen behandeln. Bei allen drei Beispielen soll der Anstellwinkel Null der Propellerflügel wie in Abb. 1 bei $\pi/2$ und $3\pi/2$ liegen. Die einzelnen Propellerflügel erstrecken sich wieder über 20°, so daß $\alpha = 10°$ ist. Die Zirkulation und sämtliche Geschwindigkeiten sind auf Einheiten von u_0 bezogen, alle Kräfte in Einheiten von $\varrho\,u_0^2\,R$ und alle Momente in Einheiten von $\varrho\,u_0^2\,R^2$ angegeben.

Insbesondere ist

bei Beispiel 2 die maximale Flügelsteigung $r_0'/R = 0{,}25$, d. h. der maximale Anstellwinkel der Propellerflügel gegen die Kreisbahn gleich 14°, ferner der Fortschrittsgrad $u_0/R\,\omega = 1/8$;

bei Beispiel 3 die maximale Flügelsteigung $r_0'/R = 0{,}5$, d. h. der maximale Anstellwinkel der Propellerflügel gegen die Kreisbahn gleich 26,6°, ferner der Fortschrittsgrad $u_0/R\,\omega = 1/8$;

bei Beispiel 4 die maximale Flügelsteigung $r_0'/R = 0{,}5$, d. h. der maximale Anstellwinkel der Propellerflügel gegen die Kreisbahn gleich 26,6°, ferner der Fortschrittsgrad $u_0/R\,\omega = 1/4$.

Das bekannte Iterationsverfahren ergibt dann folgende Zirkulationsverteilungen:

Beispiel 2

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(t) = {} & 0{,}014 - 0{,}490\cos\omega t - 0{,}064\sin\omega t + 0{,}272\cos 2\omega t - 0{,}038\sin 2\omega t \\ & + 0{,}042\cos 3\omega t - 0{,}023\cos 4\omega t - 0{,}006\sin 4\omega t - 0{,}009\cos 5\omega t + 0{,}010\sin 6\omega t, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma(\psi, t) = {} & 0{,}050\sqrt{1-\frac{\psi^2}{\alpha^2}} + \sqrt{\frac{\alpha+\psi}{\alpha-\psi}}\left[\left(-0{,}888 + 0{,}040\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}048\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos\omega t\right. \\ & + \left(0{,}150 - 0{,}532\,\frac{\psi}{\alpha}\right)\sin\omega t + \left(0{,}512 - 0{,}032\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 2\omega t \\ & + \left(0{,}020 - 0{,}196\,\frac{\psi}{\alpha} + 0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 2\omega t + \left(0{,}072 + 0{,}016\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 3\omega t \\ & + \left(0{,}022 - 0{,}044\,\frac{\psi}{\alpha}\right)\sin 3\omega t + \left(-0{,}046 + 0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 4\omega t \\ & + \left(-0{,}024 + 0{,}028\,\frac{\psi}{\alpha}\right)\sin 4\omega t + \left(-0{,}018 - 0{,}004\,\frac{\psi}{\alpha} + 0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 5\omega t \\ & + \left(-0{,}008 + 0{,}016\,\frac{\psi}{\alpha}\right)\sin 5\omega t + \left(-0{,}008 + 0{,}016\,\frac{\psi}{\alpha}\right)\cos 6\omega t \\ & \left. + \left(0{,}020 + 0{,}004\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 6\omega t\right]. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Beispiel 3

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(t) = {} & 0{,}032 - 1{,}362\cos\omega t - 0{,}438\sin\omega t + 0{,}784\cos 2\omega t - 0{,}075\sin 2\omega t \\ & + 0{,}132\cos 3\omega t - 0{,}055\sin 3\omega t - 0{,}06\cos 4\omega t - 0{,}01\sin 4\omega t - 0{,}02\cos 5\omega t \\ & + 0{,}045\sin 5\omega t - 0{,}015\cos 6\omega t + 0{,}06\sin 6\omega t, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma(\psi, t) = {} & 0{,}116\sqrt{1-\frac{\psi^2}{\alpha^2}} + \sqrt{\frac{\alpha+\psi}{\alpha-\psi}}\left[\left(-2{,}432 - 0{,}020\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}072\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos\omega t\right. \\ & + \left(-0{,}368 - 0{,}868\,\frac{\psi}{\alpha} + 0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin\omega t + \left(1{,}484 - 0{,}028\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}088\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 2\omega t \\ & + \left(0{,}118 - 0{,}544\,\frac{\psi}{\alpha} + 0{,}040\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 2\omega t + \left(0{,}246 + 0{,}028\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}040\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 3\omega t \\ & \left. + \left(-0{,}028 - 0{,}132\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 3\omega t + \left(-0{,}142 + 0{,}036\,\frac{\psi}{\alpha} + 0{,}024\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 4\omega t\right] \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$+\left(-0{,}048+0{,}116\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}048\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 4\omega t+\left(-0{,}078+0{,}060\,\frac{\psi}{\alpha}+0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 5\omega t$$
$$+\left(0{,}062+0{,}060\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}024\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 5\omega t+\left(-0{,}072+0{,}100\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 6\omega t$$
$$+\left(0{,}124+0{,}012\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}040\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 6\omega t\Big].$$

Beispiel 4

$$\begin{aligned}\Gamma(t) = {} & 0{,}027-0{,}480\cos\omega t-0{,}092\sin\omega t+0{,}292\cos 2\omega t-0{,}118\sin 2\omega t\\ & +0{,}046\cos 3\omega t+0{,}025\sin 3\omega t-0{,}014\cos 4\omega t\\ & +0{,}010\sin 5\omega t-0{,}005\cos 6\omega t+0{,}020\sin 6\omega t.\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\gamma(\psi,t) = {} & 0{,}098\Big[\sqrt{1-\frac{\psi^2}{\alpha^2}}+\sqrt{\frac{\alpha+\psi}{\alpha-\psi}}\Big[\left(-0{,}860+0{,}020\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}048\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos\omega t\\ & +\left(0{,}096-0{,}528\,\frac{\psi}{\alpha}\right)\sin\omega t+\left(0{,}552-0{,}040\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 2\omega t\\ & +\left(-0{,}120-0{,}204\,\frac{\psi}{\alpha}+0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 2\omega t+\left(0{,}066+0{,}052\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 3\omega t\\ & +\left(0{,}076-0{,}052\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 3\omega t+\left(-0{,}042+0{,}032\,\frac{\psi}{\alpha}\right)\cos 4\omega t\\ & +\left(-0{,}008+0{,}040\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}024\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 4\omega t+\left(-0{,}008+0{,}016\,\frac{\psi}{\alpha}\right)\cos 5\omega t\\ & +0{,}018\sin 5\omega t+\left(-0{,}024+0{,}040\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 6\omega t\\ & +\left(0{,}040+0{,}008\,\frac{\psi}{\alpha}-0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 6\omega t\Big].\end{aligned}\tag{9}$$

Genau wie in Ziff. 8 der ersten Arbeit wurden die einzelnen Geschwindigkeitsanteile berechnet, aus denen sich die resultierende Geschwindigkeit w (relativ zu Propellerflügel) zusammensetzt. Das Ergebnis ist in den Tabellen 2 bis 4 enthalten.

Tabelle 2 **(Beispiel 2)**

ωt	$\Sigma' u_\Gamma$	$\Sigma' v_\Gamma$	u_f	v_f	$-u_\omega$	$-v_\omega$	u_s
0	+ 0,025	— 0,022	+ 0,809	+ 0,049	0,00	— 8,00	+ 1,00
$\frac{\pi}{6}$	+ 0,004	— 0,035	+ 0,741	+ 0,045	+ 4,00	— 6,928	+ 1,00
$\frac{\pi}{3}$	— 0,009	— 0,106	+ 0,388	— 0,070	+ 6,928	— 4,00	+ 1,00
$\frac{\pi}{2}$	+ 0,034	— 0,160	— 0,180	— 0,282	+ 8,00	0,00	+ 1,00
$\frac{2\pi}{3}$	+ 0,088	— 0,163	+ 0,069	— 0,368	+ 6,928	+ 4,00	+ 1,00
$\frac{5\pi}{6}$	+ 0,094	— 0,100	+ 0,284	— 0,227	+ 4,00	+ 6,928	+ 1,00
π	+ 0,015	— 0,051	+ 0,353	— 0,015	0,00	+ 8,00	+ 1,00
$\frac{7\pi}{6}$	— 0,070	— 0,085	+ 0,278	+ 0,197	— 4,00	+ 6,928	+ 1,00
$\frac{4\pi}{3}$	— 0,071	— 0,143	+ 0,099	+ 0,304	— 6,928	+ 4,00	+ 1,00
$\frac{3\pi}{2}$	— 0,024	— 0,146	— 0,116	+ 0,260	— 8,00	0,00	+ 1,00
$\frac{5\pi}{3}$	+ 0,028	— 0,112	+ 0,362	+ 0,090	— 6,928	— 4,00	+ 1,00
$\frac{11\pi}{6}$	+ 0,039	— 0,047	+ 0,659	+ 0,037	— 4,00	— 6,928	+ 1,00

Tabelle 3 (Beispiel 3)

ωt	$\Sigma' u_\Gamma$	$\Sigma' v_\Gamma$	u_f	v_f	$-u_\infty$	$-v_\infty$	u_a
0	+ 0,163	— 0,048	+ 2,230	+ 0,236	0,00	— 8,00	+ 1,00
$\frac{\pi}{6}$	+ 0,066	— 0,081	+ 1,946	+ 0,289	+ 4,00	— 6,928	+ 1,00
$\frac{\pi}{3}$	+ 0,015	— 0,251	+ 0,921	— 0,195	+ 6,928	— 4,00	+ 1,00
$\frac{\pi}{2}$	+ 0,112	— 0,441	— 0,585	— 0,759	+ 8,00	0,00	+ 1,00
$\frac{2\pi}{3}$	+ 0,280	— 0,488	+ 0,042	—1 ,069	+ 6,928	+ 4,00	+ 1,00
$\frac{5\pi}{6}$	+ 0,327	— 0,296	+ 0,709	— 0,754	+ 4,00	+ 6,928	+ 1,00
π	+ 0,142	— 0,150	+ 0,980	— 0,212	0,00	+ 8,00	+ 1,00
$\frac{7\pi}{6}$	— 0,137	— 0,220	+ 0,889	+ 0,430	— 4,00	+ 6,928	+ 1,00
$\frac{4\pi}{3}$	— 0,149	— 0,376	+ 0,404	+ 0,823	— 6,928	+ 4,00	+ 1,00
$\frac{3\pi}{2}$	— 0,059	— 0,414	— 0,245	+ 0,755	— 8,00	0,00	+ 1,00
$\frac{5\pi}{3}$	+ 0,121	— 0,337	+ 1,171	+ 0,237	— 6,928	— 4,00	+ 1,00
$\frac{11\pi}{6}$	+ 0,158	— 0,151	+ 1,978	+ 0,222	— 4,00	— 6,928	+ 1,00

Tabelle 4 (Beispiel 4)

ωt	$\Sigma' u_\Gamma$	$\Sigma' v_\Gamma$	u_f	v_f	$-u_\infty$	$-v_\infty$	u_a
0	+ 0,050	— 0,021	+ 0,787	+ 0,078	0,00	— 4,00	+ 1,00
$\frac{\pi}{6}$	+ 0,019	—0,03 8	+ 0,871	+ 0,107	+ 2,00	— 3,464	+ 1,00
$\frac{\pi}{3}$	+ 0,006	— 0,104	+ 0,465	— 0,083	+ 3,464	— 2,00	+ 1,00
$\frac{\pi}{2}$	+ 0,045	— 0,172	— 0,203	— 0,312	+ 4,00	0,00	+ 1,00
$\frac{2\pi}{3}$	+ 0,094	— 0,172	+ 0,077	— 0,412	+ 3,464	+ 2,00	+ 1,00
$\frac{5\pi}{6}$	+ 0,094	— 0,100	+ 0,330	— 0,221	+ 2,00	+ 3,464	+ 1,00
π	+ 0,013	— 0,048	+ 0,353	+ 0,020	0,00	+ 4,00	+ 1,00
$\frac{7\pi}{6}$	— 0,078	— 0,074	+ 0,245	+ 0,213	— 2,00	+ 3,464	+ 1,00
$\frac{4\pi}{3}$	— 0,071	— 0,127	+ 0,063	+ 0,268	— 3,464	+ 2,00	+ 1,00
$\frac{3\pi}{2}$	— 0,028	— 0,134	— 0,097	+ 0,214	— 4,00	0,00	+ 1,00
$\frac{5\pi}{3}$	+ 0,027	— 0,101	+ 0,247	+ 0,069	—3 ,464	— 2,00	+ 1,00
$\frac{11\pi}{6}$	+ 0,045	— 0,054	+ 0,559	+ 0,061	— 2,00	— 3,464	+ 1,00

Aus den Tabellen 2 bis 4 entnimmt man ohne weiteres die Geschwindigkeiten U, V und $w = \sqrt{U^2 + V^2}$. Die Richtung von w gibt $\beta = \operatorname{arc\,tg} V/U$ an (gegen die positive x-Achse gemessen). Das Ergebnis ist in den nächsten Tabellen 5 bis 7 zusammengestellt.

Tabelle 5 (Beispiel 2)

ωt	U	V	w	β	ωt	U	V	w	β
0	+ 1,834	— 7,973	8,18	— 77,0°	π	+ 1,368	+ 7,934	8,05	+ 80,2°
$\frac{\pi}{6}$	+ 5,745	— 6,918	8,99	— 50,3°	$\frac{7\pi}{6}$	— 2,792	+ 7,040	7,57	+ 111,6°
$\frac{\pi}{3}$	+ 8,307	— 4,176	9,30	— 26,7°	$\frac{4\pi}{3}$	— 5,900	+ 4,161	7,22	+ 144,8°
$\frac{\pi}{2}$	+ 8,854	— 0,442	8,86	— 2,9°	$\frac{3\pi}{2}$	— 7,140	+ 0,114	7,14	+ 179,1°
$\frac{2\pi}{3}$	+ 8,085	+ 3,469	8,79	+ 23,2°	$\frac{5\pi}{3}$	— 5,538	— 4,022	6,84	— 144,0°
$\frac{5\pi}{6}$	+ 5,378	+ 6,601	8,51	+ 50,9°	$\frac{11\pi}{6}$	— 2,302	— 6,938	7,31	— 108,4°

Tabelle 6 (Beispiel 3)

ωt	U	V	w	β	ωt	U	V	w	β
0	+ 3,393	— 7,812	8,52	— 66,5°	π	+ 2,122	+ 7,638	7,93	+ 74,5°
$\frac{\pi}{6}$	+ 7,012	— 6,720	9,71	— 43,8°	$\frac{7\pi}{6}$	— 2,248	+ 7,138	7,48	+ 107,5°
$\frac{\pi}{3}$	+ 8,864	— 4,446	9,92	— 26,6°	$\frac{4\pi}{3}$	— 5,673	+ 4,447	7,21	+ 141,9°
$\frac{\pi}{2}$	+ 8,527	— 1,200	8,61	— 8,0°	$\frac{3\pi}{2}$	— 7,304	+ 0,341	7,31	+ 177,3°
$\frac{2\pi}{3}$	+ 8,250	+ 2,443	8,60	+ 16,5°	$\frac{5\pi}{3}$	— 4,636	— 4,100	6,19	— 138,5°
$\frac{5\pi}{6}$	+ 6,036	+ 5,878	8,42	+ 44,2°	$\frac{11\pi}{6}$	— 0,864	— 6,857	6,91	— 97,2°

Tabelle 7 (Beispiel 4)

ωt	U	V	w	β	ωt	U	V	w	β
0	+ 1,837	— 3,943	4,35	— 65,0°	π	+ 1,366	+ 3,972	4,20	+ 71,0°
$\frac{\pi}{6}$	+ 3,890	— 3,395	5,16	— 41,1°	$\frac{7\pi}{6}$	— 0,833	+ 3,603	3,70	+ 103,0°
$\frac{\pi}{3}$	+ 4,935	— 2,187	5,40	— 23,9°	$\frac{4\pi}{3}$	— 2,472	+ 2,141	3,27	+ 139,1°
$\frac{\pi}{2}$	+ 4,842	— 0,484	4,87	— 5,7°	$\frac{3\pi}{2}$	— 3,125	+ 0,080	3,13	+ 178,5°
$\frac{2\pi}{3}$	+ 4,635	+ 1,416	4,85	+ 17,0°	$\frac{5\pi}{3}$	— 2,190	— 2,032	2,99	— 137,1°
$\frac{5\pi}{6}$	+ 3,424	+ 3,143	4,65	+ 42,6°	$\frac{11\pi}{6}$	— 0,396	— 3,457	3,48	— 96,5°

Die Berechnung des Druckmittelpunktes nach Formel (I,40) liefert das in den Tabellen 8, 9 und 10 wiedergegebene Ergebnis

Tabelle 8 (Beispiel 2)

ωt	v_0/Λ
0°	0,52
30°	0,71
60°	0,70
90°	0,70
120°	0,22
150°	0,44
180°	0,48
210°	0,52
240°	0,66
270°	0,23
300°	0,22
330°	0,22

Tabelle 9 (Beispiel 3)

ωt	v_0/Λ
0°	0,51
30°	0,67
60°	0,61
90°	0,60
120°	0,20
150°	0,47
180°	0,50
210°	0,50
240°	0,54
270°	0,33
300°	0,24
330°	0,30

Tabelle 10 (Beispiel 4)

ωt	v_0/Λ
0°	0,49
30°	0,75
60°	0,68
90°	0,70
120°	0,28
150°	0,44
180°	0,48
210°	0,51
240°	0,71
270°	0,18
300°	0,15
330°	0,15

In den nun folgenden Tabellen 11 bis 13 sind die resultierenden Kräfte an den Propellerflügeln und alle zu ihrer Berechnung erforderlichen Größen zusammengestellt. Dabei ist die resultierende Geschwindigkeit w im Druckmittelpunkt nach Größe und Richtung mit Hilfe der Tabellen 5, 6 und 7 interpoliert. Die Richtungswinkel sind gegen die positive x-Achse gerechnet.

Tabelle 11 (Beispiel 2)

Lage des Profilmittelpunktes	Lage des Druckmittelpunktes	result. Geschw. w im Druckmittelpunkt	Richtung von w im Druckmittelpunkt	Profilzirkulation Γ	Größe der result. Kraft K	Richtung der result. Kraft K	Richtung des Propellerflügelprofiles
0°	5,2°	8,32	— 72,4°	— 0,194	1,614	— 162,4°	— 76,0°
30°	37,1°	9,15	— 44,7°	— 0,325	2,974	— 134,7°	— 47,8°
60°	67,0°	9,19	— 21,2°	— 0,485	4,457	— 111,2°	— 22,9°
90°	97,0°	8,84	+ 3,2°	— 0,345	3,050	— 86,8°	— 0,0°
120°	122,2°	8,78	+ 25,2°	+ 0,155	1,361	+ 115,2°	+ 22,9°
150°	154,4°	8,44	+ 55,2°	+ 0,584	4,929	+ 145,2°	+ 47,8°
180°	184,8°	7,97	+ 85,2°	+ 0,720	5,738	+ 175,2°	+ 76,0°
210°	215,2°	7,50	+ 117,4°	+ 0,571	4,282	— 152,6°	+ 107,8°
240°	246,6°	7,20	+ 152,4°	+ 0,209	1,504	— 117,6°	+ 142,9°
270°	272,3°	7,12	— 178,1°	— 0,217	1,545	+ 91,9°	0,0°
300°	302,2°	6,88	— 141,3°	— 0,320	2,201	+ 128,7°	— 142,9°
330°	332,2°	7,37	— 106,1°	— 0,184	1,356	+ 163,9°	— 107,8°

Tabelle 12 (Beispiel 3)

Lage des Profilmittelpunktes	Lage des Druckmittelpunktes	result. Geschw. w im Druckmittelpunkt	Richtung von w im Druckmittelpunkt	Profilzirkulation Γ	Größe der result. Kraft K	Richtung der result. Kraft K	Richtung des Propellerflügelprofiles
0°	5,1°	8,72	— 62,7°	— 0,51	4,45	— 152,7°	— 63,4°
30°	36,7°	9,88	— 40,0°	— 1,02	10,08	— 130,0°	— 36,6°
60°	66,1°	9,65	— 22,9°	— 1,64	15,83	— 112,9°	— 16,0°
90°	96,0°	8,61	— 3,1°	— 1,13	9,73	— 93,1°	0,0°
120°	122,0°	8,59	+ 18,4°	+ 0,12	1,03	+ 108,4°	+ 16,0°
150°	154,7°	8,34	+ 49,0°	+ 1,45	12,09	+ 139,0°	+ 36,6°
180°	185,0°	7,85	+ 80,0°	+ 1,99	15,62	+ 170,0°	+ 63,4°
210°	215,0°	7,41	+ 113,2°	+ 1,81	13,41	— 156,8°	+ 96,6°
240°	245,4°	7,23	+ 148,3°	+ 0,84	6,07	— 121,7°	+ 136,0°
270°	273,3°	7,19	— 177,8°	— 0,46	3,31	+ 92,2°	0,0°
300°	302,4°	6,24	— 135,1°	— 0,70	4,37	+ 134,9°	— 136,0°
330°	333,0°	7,07	— 94,1°	— 0,37	2,62	+ 175,9°	— 96,6°

Tabelle 13 (Beispiel 4)

Lage des Profilmittelpunktes	Lage des Druckmittelpunktes	result. Geschw. w im Druckmittelpunkt	Richtung von w im Druckmittelpunkt	Profilzirkulation Γ	Größe der result. Kraft K	Richtung der result. Kraft K	Richtung des Propellerflügelprofiles
0°	4,9°	4,48	— 61,1°	— 0,134	0,600	— 151,1°	— 63,4°
30°	37,5°	5,34	— 36,8°	— 0,349	1,864	— 126,8°	— 36,6°
60°	66,8°	5,28	— 19,8°	— 0,593	3,131	— 109,8°	— 16,0°
90°	97,0°	4,86	— 0,4°	— 0,381	1,852	— 90,4°	0,0°
120°	122,8°	4,84	+ 19,4°	+ 0,183	0,886	+ 109,4°	+ 16,0°
150°	154,4°	4,59	+ 46,7°	+ 0,687	3,153	+ 136,7°	+ 36,6°
180°	184,8°	4,12	+ 76,1°	+ 0,734	3,024	+ 166,1°	+ 63,4°
210°	215,1°	3,62	+ 109,1°	+ 0,515	1,864	— 160,9°	+ 96,6°
240°	247,1°	3,24	+ 148,4°	+ 0,155	0,502	— 121,6°	+ 136,0°
270°	271,8°	3,12	— 178,8°	— 0,167	0,521	+ 91,2°	0,0°
300°	301,5°	3,00	— 135,1°	— 0,213	0,639	+ 134,9°	— 136,0°
330°	331,5°	3,52	— 94,9°	— 0,114	0,401	+ 175,1°	— 96,6°

Die Zerlegung der resultierenden Kräfte K in ihre x- und y-Komponenten sowie die Berechnung des Drehmomentes nach Formel (2) liefert das in den Tabellen 14, 15, 16 enthaltene Ergebnis:

Tabelle 14 (Beispiel 2)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M	Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M
0°	— 1,54	— 0,49	— 0,35	180°	— 5,72	+ 0,48	— 0,96
30°	— 2,09	— 2,11	— 0,42	210°	— 3,80	— 1,97	— 0,58
60°	— 1,61	— 4,16	— 0,14	240°	— 0,69	— 1,33	— 0,11
90°	+ 0,17	— 3,04	+ 0,20	270°	— 0,05	+ 1,54	+ 0,01
120°	— 0,58	+ 1,23	— 0,16	300°	— 1,38	+ 1,72	— 0,25
150°	— 4,05	+ 2,81	— 0,79	330°	— 1,31	+ 0,38	— 0,27

Tabelle 15 (Beispiel 3)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M	Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M
0°	— 3,96	— 2,04	— 1,68	180°	— 15,38	+ 2,71	— 4,04
30°	— 6,48	— 7,72	— 2,32	210°	— 12,32	— 5,28	— 2,74
60°	— 6,16	— 14,57	— 0,28	240°	— 3,19	— 5,16	— 0,75
90°	— 0,53	— 9,72	+ 1,54	270°	— 0,13	+ 3,31	+ 0,06
120°	— 0,33	+ 0,98	— 0,24	300°	— 3,09	+ 3,09	— 0,95
150°	— 9,13	+ 7,93	— 3,27	330°	— 2,61	+ 0,19	— 1,02

Tabelle 16 (Beispiel 4)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M	Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M
0°	— 0,53	— 0,29	— 0,24	180°	— 2,94	+ 0,73	— 0,97
30°	— 1,12	— 1,49	— 0,50	210°	— 1,76	— 0,61	— 0,51
60°	— 1,06	— 2,94	— 0,19	240°	— 0,26	— 0,43	— 0,08
90°	— 0,01	— 1,85	+ 0,24	270°	— 0,01	+ 0,52	+ 0,01
120°	— 0,29	+ 0,84	— 0,21	300°	— 0,45	+ 0,45	— 0,15
150°	— 2,29	+ 2,16	— 0,96	330°	— 0,40	+ 0,03	— 0,16

Als Mittelwerte der beiden nach den Tabellen 14, 15 und 16 berechenbaren Propellerstellungen 0 und $\pi/6$ erhalten wir für die resultierenden Gesamtkräfte, das Gesamtmoment und den Wirkungsgrad der behandelten Voith-Schneider-Propeller:

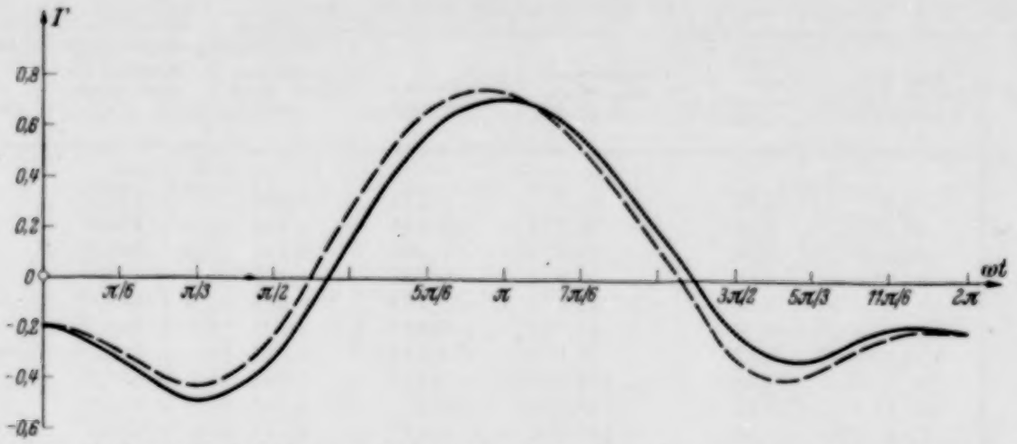


Abb. 2. Beispiel 2: Zirkulationsverteilung Γ (glatt) und Zirkulationsverteilung $\Gamma + \Gamma^*$ für genaue Vorwärtsfahrt (gestrichelt).

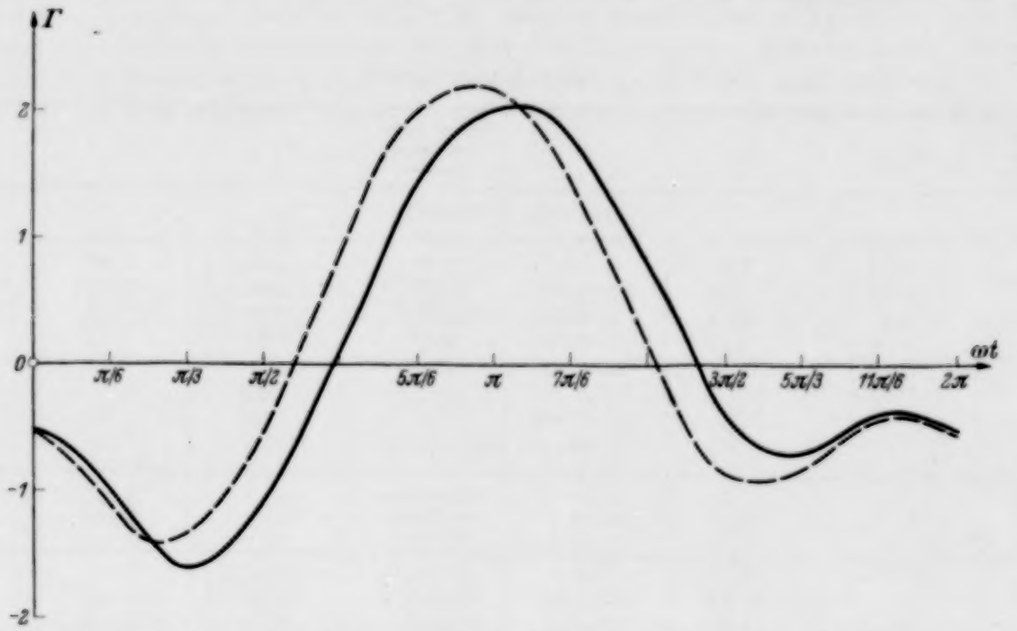


Abb. 3. Beispiel 3: Zirkulationsverteilung Γ (glatt) und Zirkulationsverteilung $\Gamma + \Gamma^*$ für genaue Vorwärtsfahrt (gestrichelt).

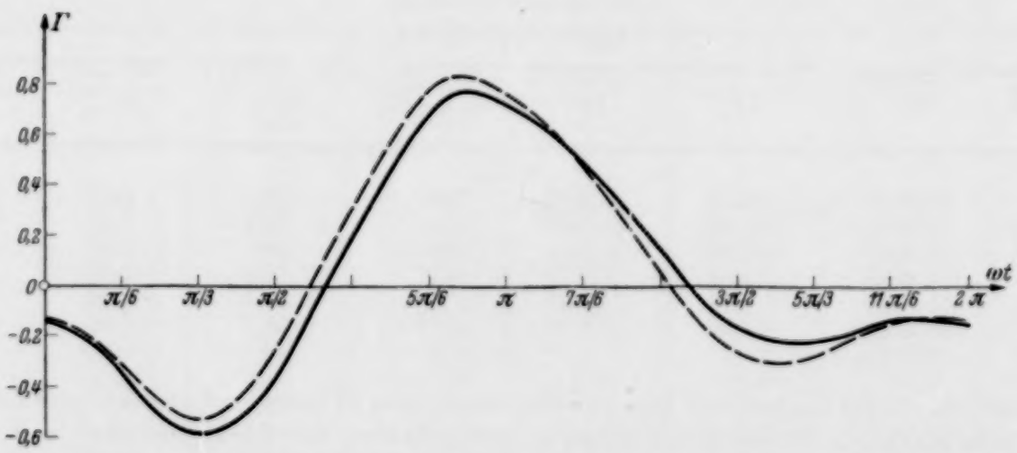


Abb. 4. Beispiel 4: Zirkulationsverteilung Γ (glatt) und Zirkulationsverteilung $\Gamma + \Gamma^*$ für genaue Vorwärtsfahrt (gestrichelt).

Beispiel 2: $K_x^{(P)} = -11{,}32\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K_y^{(P)} = -2{,}47\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K^{(P)} = 11{,}59\,\varrho\,u_0^2\,R$, Richtung $\beta_K = -167{,}7°$,

$M^{(P)} = -1{,}91\,\varrho\,u_0^2\,R^2$, $\eta = 0{,}76$.

Beispiel 3: $K_x^{(P)} = -31{,}65\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K_y^{(P)} = -13{,}14\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K^{(P)} = 34{,}27\,\varrho\,u_0^2\,R$, Richtung $\beta_K = -157{,}5°$,

$M^{(P)} = -7{,}84\,\varrho\,u_0^2\,R^2$, $\eta = 0{,}55$.

Beispiel 4: $K_x^{(P)} = -5{,}56\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K_y^{(P)} = -1{,}44\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K^{(P)} = 5{,}74\,\varrho\,u_0^2\,R$, Richtung $\beta_K = 165{,}5°$,

$M^{(P)} = -1{,}86\,\varrho\,u_0^2\,R^2$, $\eta = 0{,}77$.

Auch bei diesen Beispielen ist die resultierende Propellerkraft nicht genau entgegengesetzt zur Anströmung gerichtet, sondern bildet mit dieser einen Winkel von 12,3° bzw. 22,5° bzw. 14,5°.

Mit Hilfe der in Ziff. 9 der ersten Arbeit angegebenen Methode soll jetzt noch untersucht werden, an welcher Stelle der Anstellwinkel Null der Propellerflügel gegenüber der Kreisbahn liegen muß, um genaue Vorwärtsfahrt zu erreichen. Dabei können wir uns mit Rücksicht auf Arbeit I weitere Erklärungen ersparen. Das Ergebnis der Rechnung ist in den Tabellen 17 bis 19 enthalten. Ausnahmsweise (um den Faktor v_0/u_0 nicht immer mitschleppen zu müssen) ist hier die zusätzliche Zirkulation Γ^* in Einheiten von v_0 und die Zusatzkraft K^* in Einheiten von $\varrho\,u_0\,v_0\,R$ angegeben.

Tabelle 17 (Beispiel 2)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	Zusätzliche Zirkulation Γ^*	K_x^*	K_y^*	Mittelpunkt des Flügelprofiles	Zusätzliche Zirkulation Γ^*	K_x^*	K_y^*
0°	+ 0,16	+ 1,27	+ 0,40	180°	+ 0,61	— 4,84	+ 0,41
30°	+ 0,56	+ 3,60	+ 3,64	210°	— 0,04	+ 0,27	+ 0,14
60°	+ 0,80	+ 2,66	+ 6,85	240°	— 0,70	+ 2,33	+ 4,47
90°	+ 0,95	— 0,47	+ 8,39	270°	— 1,20	— 0,28	+ 8,54
120°	+ 1,05	— 3,93	+ 8,34	300°	— 1,08	— 4,64	+ 5,80
150°	+ 0,97	— 6,72	+ 4,67	330°	— 0,45	— 3,19	+ 0,92

Tabelle 18 (Beispiel 3)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	Zusätzliche Zirkulation Γ^*	K_x^*	K_y^*	Mittelpunkt des Flügelprofiles	Zusätzliche Zirkulation Γ^*	K_x^*	K_y^*
0°	+ 0,44	+ 3,41	+ 1,76	180°	+ 0,94	— 7,27	+ 1,28
30°	+ 0,77	+ 4,89	+ 5,83	210°	+ 0,30	— 2,04	— 0,87
60°	+ 0,88	+ 3,30	+ 7,82	240°	— 0,55	+ 2,09	+ 3,39
90°	+ 0,93	+ 0,43	+ 8,00	270°	— 1,15	— 0,32	+ 8,26
120°	+ 1,05	— 2,85	+ 8,56	300°	— 1,02	— 4,49	+ 4,50
150°	+ 1,16	— 7,30	+ 6,34	330°	— 0,28	— 1,97	+ 0,14

Tabelle 19 (Beispiel 4)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	Zusätzliche Zirkulation Γ^*	K_x^*	K_y^*	Mittelpunkt des Flügelprofiles	Zusätzliche Zirkulation Γ^*	K_x^*	K_y^*
0°	+ 0,44	+ 1,72	+ 0,95	180°	+ 0,94	— 3,75	+ 0,93
30°	+ 0,77	+ 2,46	+ 3,29	210°	+ 0,30	— 1,03	— 0,36
60°	+ 0,88	+ 1,57	+ 4,38	240°	— 0,55	+ 0,93	+ 1,52
90°	+ 0,93	+ 0,03	+ 4,53	270°	— 1,15	— 0,07	+ 3,59
120°	+ 1,05	— 1,69	+ 4,79	300°	— 1,02	— 2,16	+ 2,17
150°	+ 1,16	— 3,87	+ 3,65	330°	— 0,28	— 0,99	+ 0,08

Als resultierende Gesamtkräfte der Voith-Schneider-Propeller (einschl. der eben angegebenen Zusatzkräfte) haben wir dann:

Beispiel 2: $K_x^{(P)} = -\left(11{,}32 + 6{,}97\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R$, $K_y^{(P)} = -\left(2{,}47 - 26{,}28\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R$;

Beispiel 3: $K_x^{(P)} = -\left(31{,}65 + 6{,}06\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R$, $K_y^{(P)} = -\left(13{,}14 - 27{,}51\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R$;

Beispiel 4: $K_x^{(P)} = -\left(5{,}56 + 3{,}42\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u_0^2\, R$, $K_y^{(P)} = -\left(1{,}44 - 14{,}76\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\, u^2\, R$.

Aus der Bedingung für die genaue Vorwärtsfahrt $K_y^{(P)}/K_x^{(P)} = v_0/u_0$ folgt für:

Beispiel 2: $\frac{v_0}{u_0} = 0{,}065$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{u_0} = 3{,}7°$

und somit $K_x^{(P)} = -11{,}77\,\varrho\, u_0^2\, R$, $K_y^{(P)} = -0{,}76\,\varrho\, u_0^2\, R$, $K^{(P)} = 11{,}79\,\varrho\, u_0^2\, R$;

Beispiel 3: $\frac{v_0}{u_0} = 0{,}217$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{u_0} = 12{,}3°$;

und somit $K_x^{(P)} = -32{,}97\,\varrho\, u_0^2\, R$, $K_y^{(P)} = -7{,}17\,\varrho\, u_0^2\, R$, $K^{(P)} = 33{,}73\,\varrho\, u_0^2\, R$;

Beispiel 4: $\frac{v_0}{u_0} = 0{,}070$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{u_0} = 4{,}0°$;

und somit $K_x^{(P)} = -5{,}80\,\varrho\, u_0^2\, R$, $K_y^{(P)} = -0{,}41\,\varrho\, u_0^2\, R$, $K^{(P)} = 5{,}81\,\varrho\, u_0^2\, R$.

Das Ergebnis der Untersuchung lautet somit: Um bei Anströmung in x-Richtung genaue Vorwärtsfahrt zu erreichen, muß der Anstellwinkel Null der Propellerflügel an den Stellen 86,3° und 266,3° (Beispiel 2), bzw. 77,7° und 257,7° (Beispiel 3), bzw. 86° und 266° (Beispiel 4) liegen.

Die Zirkulationsverteilung der genauen Vorwärtsfahrt $\Gamma + \Gamma^*$ ist durch die gestrichelte Kurve in Abb. 2, 3 und 4 dargestellt. Die glatt ausgezogene Kurve in diesen Abbildungen stellt die ursprüngliche Zirkulationsverteilung nach Formel (4), (6), (8) dar.

4. Diskussion der Ergebnisse. Bei einer Betrachtung der Ergebnisse der Beispiele 1 bis 4 fällt zunächst auf, daß der Propeller keine genaue Vorwärtsfahrt liefert, wenn der Anstellwinkel Null der Propellerflügel bei $\pi/2$ und $3\,\pi/2$ liegt. Inwieweit das wirklich der Fall ist, konnte ich aus der mir bekannt gewordenen technischen Literatur[1] über Messungen an Voith-Schneider-Propellern nicht entnehmen.

Es gibt jedoch zwei Umstände, die noch im Rahmen der hier entwickelten Theorie eine Verminderung dieses Ablenkungseffektes bewirken. Wir haben in unseren bisherigen Betrachtungen ja stets die Propellerflügel als „unendlich dünn" angenommen und sie durch eine linienhafte Zirkulationsverteilung ersetzt. Dieser Umstand hatte zur Folge, daß wir keine stoßfreie Anströmung der Propellerflügel erhalten konnten. Dadurch wiederum war bedingt, daß der Druckmittelpunkt stets im vorderen Drittel des Propellerflügels lag. Bei den in der Wirklichkeit vorkommenden endlich dicken und vorne etwas abgerundeten Flügelprofilen wird der Druckmittelpunkt jedoch mehr in der Mitte des Flügelprofiles liegen.

Berechnet man nun die Kräfte an den Propellerflügeln unter Verwendung der früheren Zirkulationsverteilung, jedoch mit der Annahme, daß der Druckmittelpunkt mit dem Profilmittelpunkt zusammenfalle, so erhält man das in den Tabellen 20 bis 23 wiedergegebene Ergebnis.

Tabelle 20 (Beispiel 1)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M	Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M
0°	— 9,80	— 2,11	— 2,11	180°	— 31,55	+ 4,33	— 4,33
30°	— 13,83	— 10,92	— 2,54	210°	— 26,14	— 11,58	— 3,04
60°	— 12,61	— 23,42	— 0,79	240°	— 7,62	— 11,30	— 0,95
90°	— 1,30	— 18,19	+ 1,30	270°	+ 0,20	+ 8,16	+ 0,20
120°	— 0,97	+ 2,29	— 0,30	300°	— 7,04	+ 9,94	— 1,13
150°	— 17,93	+ 14,16	— 3,29	330°	— 7,29	+ 2,47	— 1,51

[1] *H. Kreitner*, Werft-Reederei-Hafen (1931), S. 185; *W. Just*, Werft-Reederei-Hafen (1939), S. 5; *W. Baer*, Schiff u. Hafen (1952), S. 300; *W. Baer*, Hansa (1954), S. 2067.

Tabelle 21 (Beispiel 2)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M	Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M
0°	— 1,54	— 0,36	— 0,36	180°	— 5,71	+ 0,99	— 0,99
30°	— 2,25	— 1,86	— 0,49	210°	— 4,02	— 1,59	— 0,63
60°	— 2,02	— 4,03	— 0,26	240°	— 0,87	— 1,23	— 0,14
90°	— 0,15	— 3,05	+ 0,15	270°	+ 0,02	+ 1,55	+ 0,02
120°	— 0,54	+ 1,25	— 0,16	300°	— 1,29	+ 1,77	— 0,23
150°	— 3,86	+ 3,14	— 0,78	330°	— 1,27	+ 0,42	— 0,27

Tabelle 22 (Beispiel 3)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M	Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M
0°	— 3,99	— 1,73	— 1,73	180°	— 15,20	+ 4,22	— 4,22
30°	— 6,85	— 7,14	— 2,76	210°	— 12,91	— 4,06	— 2,93
60°	— 7,28	— 14,49	— 0,94	240°	— 3,73	— 4,76	— 0,85
90°	— 1,35	— 9,63	+ 1,35	270°	+ 0,16	+ 3,36	+ 0,16
120°	— 0,29	+ 0,99	— 0,24	300°	— 2,87	+ 3,24	— 0,86
150°	— 8,51	+ 8,76	— 3,33	330°	— 2,54	+ 0,32	— 0,99

Tabelle 23 (Beispiel 4)

Mittelpunkt des Flügelproiles	K_x	K_y	M	Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M
0°	— 0,53	— 0,25	— 0,25	180°	— 2,91	+ 1,01	— 1,01
30°	— 1,18	— 1,35	— 0,98	210°	— 1,85	— 0,43	— 0,55
60°	— 1,30	— 2,92	— 0,34	240°	— 0,33	— 0,38	— 0,10
90°	— 0,18	— 1,84	+ 0,18	270°	+ 0,01	+ 0,52	+ 0,01
120°	— 0,26	+ 0,85	— 0,20	300°	— 0,43	+ 0,47	— 0,14
150°	— 2,16	+ 2,35	— 0,95	330°	— 0,39	+ 0,04	— 0,16

(Dabei sind für Größe und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit w jetzt natürlich die Werte aus Tabelle 2 der ersten Arbeit sowie Tabelle 5, 6 und 7 der vorliegenden Arbeit maßgebend.)

Damit ergeben sich für die resultierenden Gesamtkräfte, das Gesamtmoment und den Wirkungsgrad der behandelten Voith-Schneider-Propeller folgende Werte (Mittelwerte der beiden aus den Tabellen berechenbaren Propellerstellungen 0 und $\pi/6$):

Beispiel 1: $K_x^{(P)} = -67{,}94\ \varrho\ u_0^2\ R$, $K_y^{(P)} = -18{,}08\ \varrho\ u_0^2\ R$, $K^{(P)} = 70{,}30\ \varrho\ u_0^2\ R$, Richtung $\beta_K = -165{,}1°$,
$M^{(P)} = -9{,}24\ \varrho\ u_0^2\ R^2$, $\eta = 0{,}48$;

Beispiel 2: $K_x^{(P)} = -11{,}75\ \varrho\ u_0^2\ R$, $K_y^{(P)} = -1{,}50\ \varrho\ u_0^2\ R$, $K^{(P)} = 11{,}84\ \varrho\ u_0^2\ R$, Richtung $\beta_K = -172{,}7°$,
$M^{(P)} = -2{,}07\ \varrho\ u_0^2\ R^2$, $\eta = 0{,}71$.

Beispiel 3: $K_x^{(P)} = -32{,}68\ \varrho\ u_0^2\ R$, $K_y^{(P)} = -10{,}46\ \varrho\ u_0^2\ R$, $K^{(P)} = 34{,}32\ \varrho\ u_0^2\ R$, Richtung $\beta_K = -162{,}3°$,
$M^{(P)} = -8{,}67\ \varrho\ u_0^2\ R^2$, $\eta = 0{,}50$;

Beispiel 4: $K_x^{(P)} = -5{,}75\ \varrho\ u_0^2\ R$, $K_y^{(P)} = -0{,}96\ \varrho\ u_0^2\ R$, $K^{(P)} = 5{,}83\ \varrho\ u_0^2\ R$, Richtung $\beta_K = -170{,}5°$,
$M^{(P)} = -2{,}04\ \varrho\ u_0^2\ R^2$, $\eta = 0{,}71$.

Man erkennt, daß jetzt der Winkel zwischen Anströmrichtung und der resultierenden Gesamtkraft im Vergleich mit den früheren Ergebnissen (s. S. 157) um durchschnittlich 5° kleiner geworden ist. Dabei ist die Größe der Gesamtkraft praktisch unverändert geblieben, der Wirkungsgrad jedoch etwas gesunken.

Der zweite Umstand, der zu einer gewissen Verminderung des Kraftablenkungseffektes führt, ist folgender: Vielfach folgt die Bewegung des Anstellwinkels der Flügel gegenüber der Propellerkreisbahn nicht einem reinen Cosinusgesetz, wie wir es bisher annahmen (vgl. Arbeit I, Ziff. 4). Statt dessen lautet das Bewegungsgesetz: „Jeder Flügel ist während seines Umlaufes so zu bewegen, daß ein auf ihm senkrecht stehender Strahl dauernd durch einen und denselben Punkt hindurchgeht“[1]. Dieser Punkt P (Abb. 5) ist für alle Propellerflügel derselbe. Das bedeutet

$$-\operatorname{tg}\delta = \frac{r'}{R} = -\frac{\frac{r'_0}{R}\cos\omega t}{1+\frac{r'_0}{R}\sin\omega t}, \tag{10}$$

während wir bisher immer

$$\frac{r'}{R} = -\frac{r'_0}{R}\cos\omega t \tag{11}$$

verwendeten. Für kleine Propellersteigungen r'_0/R fallen beide Gesetze annähernd zusammen. Bei (10) ist die Größe der Anstellwinkel δ nicht mehr wie bei (11) gleichmäßig über die ganze Propellerkreisbahn verteilt, sondern die Anstellwinkel des Bereiches ($\pi \leqq \omega t \leqq 2\pi$) sind größer als die entsprechenden des Bereiches ($0 \leqq \omega t \leqq \pi$).

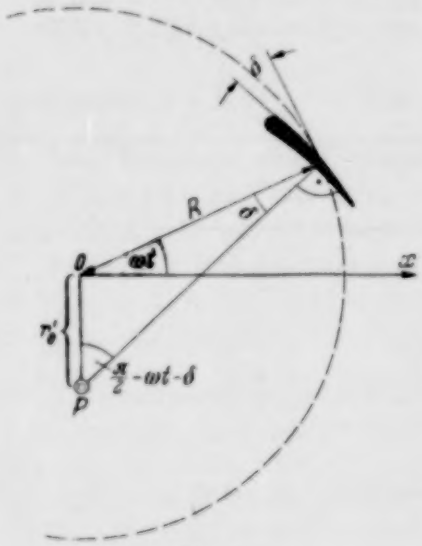


Abb. 5.

Ohne weiteres kann in der gesamten bisher entwickelten Theorie an Stelle von (11) die Formel (10) verwendet werden; deren Nenner wird für die Auflösung der Integralgleichung (I,6) durch die ersten Glieder einer geometrischen Reihe ersetzt. Auch die Formeln (I,16) ändern sich etwas. Wir wollen hier auf die Einzelheiten nicht eingehen und bemerken nur kurz folgendes: Die numerische Durchführung des Iterationsverfahrens zur Lösung der Integralgleichung (I,6) wird wesentlich mühsamer; die Ergebnisse weichen jedoch (für Steigungen bis etwa $r'_0/R = 0{,}5$) nur unerheblich von den unter Verwendung der Formel (11) erhaltenen ab. Die Rechnung mit Formel (10) dürfte sich nur lohnen, wenn die Propellersteigung r'_0/R groß ist.

Zum Beispiel ergibt sich bei einem Fortschrittsgrad $u_0/\omega R = 1/4$ und einer Steigung $r'_0/R = 0{,}5$ (Analogiefall zu Beispiel 4):

$K_x^{(P)} = -5{,}62\,\varrho\,u_0^2 R$, $K_y^{(P)} = -0{,}79\,\varrho\,u_0^2 R$, $K^{(P)} = 5{,}68\,\varrho\,u_0^2 R$,
Richtung $\beta_K = -172{,}0^\circ$, $M^{(P)} = -2{,}00\,\varrho\,u_0^2 R^2$, $\eta = 0{,}71$.

Also haben wir gegenüber dem Ergebnis bei Beispiel 4 auf S. 159 eine weitere Verminderung des Ablenkungseffektes um 1,5°.

Der Vergleich der für unsere Beispiele ausgerechneten Propellerschubkräfte $K^{(P)}$ mit vorliegenden[2] Meßergebnissen gestaltete sich etwas umständlich, da die gemessenen Propeller in bezug auf ihre Parameter (Fortschrittsgrad, Steigung, Flügeltiefe) nicht genau mit den hier berechneten Beispielen übereinstimmten, so daß entsprechende Umrechnungen nötig wurden.

Im Ergebnis zeigte sich, daß unsere errechneten Propellerschubkräfte $K^{(P)}$ um etwa 10% bis 20% größer sind als die gemessenen. Das kann mit Rücksicht auf die Tatsache, daß unserer ganzen Theorie die verlustlose Potentialströmung zugrunde liegt, als ein durchaus befriedigendes Ergebnis angesehen werden.

Auch die errechneten Wirkungsgrade haben ungefähr eine den Erwartungen entsprechende Größe, wie auch die Tatsache, daß der Wirkungsgrad mit steigendem Fortschrittsgrad zunimmt, richtig wiedergegeben wird.

5. Kritische Betrachtung des Geschwindigkeitsfeldes der freien Wirbel. Wir wollen jetzt das Geschwindigkeitsfeld der freien Wirbel noch einmal systematisch untersuchen. Dabei wird es sich zeigen, daß unsere Formel (1) eine ganz neuartige Darstellung gibt, die grundsätzlich von der bisher in der Tragflügel- und Propellertheorie üblichen abweicht. Um das zu erkennen, werden wir jetzt das Geschwindigkeitsfeld der freien Wirbel entsprechend der bisher üblichen Theorie ableiten.

---

[1] *H. Kreitner*, Werft-Reederei-Hafen (1931), S. 187.
[2] Siehe Fußnote von S. 158.

Zunächst wollen wir wie auch schon vorher die einzelnen Propellerflügel durch Punktwirbel der gleichen Gesamtzirkulation $R\,\Gamma$ ersetzen. Jeder der sechs rotierenden Flügelwirbel $R\,\Gamma$ induziert zu jedem Zeitpunkt t im Punkte $\omega\,t = \vartheta$ der Kreisbahn einen freien Wirbel der Stärke $-\frac{1}{\omega}\,R\,\dot{\Gamma}(\vartheta/\omega)\,d\vartheta$, der mit der Anströmgeschwindigkeit u_0 hinter dem Propeller abfließt. Fassen wir nun einen bestimmten Punkt ϑ ins Auge, den gerade ein Propellerflügel passiert, in dem sich also gerade ein freier Wirbel der Stärke $-\frac{1}{\omega}\,R\,\dot{\Gamma}(\vartheta/\omega)\,d\vartheta$ ablöst. Dann ist der beim Durchgang des vorhergehenden Propellerflügels im Punkte ϑ entstandene freie Wirbel bereits um die Strecke $(\pi/3\,\omega)\,u_0$ in x-Richtung abgeflossen, d. h. der Abstand der beiden freien Wirbel beträgt $\Delta x = \pi\,u_0/3\,\omega$. Nun sind die abfließenden freien Wirbel, wie schon früher erwähnt, bei Vernachlässigung ihrer gegenseitigen Beeinflussung auf mehr oder weniger kreisförmigen bzw. zykloidenförmigen Kurven angeordnet. Ohne das Wesentliche dieser Untersuchung irgendwie zu beeinträchtigen, können wir diskrete, kreisförmige Wirbelverteilungen der Stärke $-\frac{1}{\omega}\,R\,\dot{\Gamma}(\vartheta/\omega)\,d\vartheta$ $(0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi)$ mit einem jeweiligen Abstand $\Delta x = \pi\,u_0/3\,\omega$ annehmen. Wenn wir nun zu einer äquivalenten in x-Richtung kontinuierlichen Folge von Kreiswirbelverteilungen übergehen wollen, müssen wir ihre Stärke jeweils auf den Abstand zwischen zwei Wirbeln verteilen, d. h. wir erhalten eine kontinuierliche Folge von Kreiswirbelverteilungen der Zirkulationsdichte.

$$-\frac{\frac{1}{\omega}\,R\,\dot{\Gamma}\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)d\vartheta}{\frac{\pi\,u_0}{3\,\omega}} \approx -\frac{\omega\,R}{u_0}\,\frac{1}{\omega}\,\dot{\Gamma}\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)d\vartheta\,.$$

Dann ist das Geschwindigkeitsfeld der hinter dem Propeller abfließenden freien Wirbel in dem beliebigen Punkt $z = r\,e^{i\varphi}$ gegeben durch

$$u_f - i\,v_f = -\frac{i}{2\,\pi\,\omega}\left(\frac{\omega\,R}{u_0}\right)\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\dot{\Gamma}\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)d\vartheta\,dx}{r\,e^{i\varphi} - R\,e^{i\vartheta} - x}\,. \tag{12}$$

Formel (12) gilt also, wenn man die bisher üblichen Vorstellungen über die Darstellung abfließender freier Wirbel zugrunde legt. Sie unterscheidet sich von (1) durch den Faktor $\omega\,R/u_0$, d. h. den reziproken Fortschrittsgrad des Propellers.

Das Merkwürdige ist nun: Verwendet man an Stelle von (1) die Formel (12), so ergeben sich physikalisch unmögliche Resultate. Die bisher übliche Annahme, daß die induzierten freien Wirbel in unvermindert bleibender Stärke hinter dem Propeller abfließen, entspricht der physikalischen Wirklichkeit nur sehr unvollkommen. Daß dieses bisher in der gewöhnlichen Propellertheorie wohl noch nicht bemerkt worden ist, hat seine Begründung darin, daß nur beim Voith-Schneider-Propeller die Propellerflügel durch die abfließenden freien Wirbel hindurch müssen. Bei Verwendung der Formel (12) ergibt sich nämlich (wie wir in Ziff. 6 sehen werden) das erwähnte physikalisch unmögliche Resultat gerade auf der hinteren Seite des Propellers (erster und vierter Quadrant). Es besteht darin, daß dort die Zirkulationsverteilung positiv wird und somit zurückziehende Kräfte hervorruft.

Wenn wir nun in unserer Theorie die Formel (12) an Stelle von (1) verwenden, wollen wir noch berücksichtigen, daß ja (alles im Sinne der in der bisherigen Propellertheorie üblichen Annahmen) die freien Wirbel nicht nur im Durchschnitt mit der Anströmgeschwindigkeit u_0 hinter dem Propeller abfließen, sondern mit einer größeren Geschwindigkeit. Zu u_0 tritt nämlich noch der Mittelwert $\bar{u}_f$ der von den freien Wirbeln selbst induzierten Geschwindigkeit hinzu; ferner der Mittelwert der von den gebundenen Flügelwirbeln stammenden Geschwindigkeit $\sum u_\Gamma$. Es hat sich bei den in Ziff. 6 durchgerechneten Beispielen gezeigt, daß der letztere Anteil vernachlässigt werden kann, während $\bar{u}_f$ schon wegen des Faktors $\omega\,R/u_0$ in Formel (12) berücksichtigt werden muß.

Oder anders ausgedrückt: Wir werden in (12) den einfachen Fortschrittsgrad $u_0/\omega\,R$ durch den sogenannten induzierten Fortschrittsgrad ersetzen[1]. Dieser ist durch

$$\frac{u_0 + \bar{u}_f}{\omega\,R}$$

[1] Täten wir das nicht, so würden die erhaltenen Ergebnisse noch unmöglicher sein.

gegeben, wobei wir für $\bar{u}_f$ den Mittelwert von $u_f(Re^{i\omega t})$ auf der Propellerkreisbahn nehmen. Ist $\Gamma(t)$ bekannt, so ist ja $u_f(Re^{i\omega t})$ leicht aus (12) mit Hilfe der Formeln (I,31) und (I,32) auszurechnen. Durch eine elementare Integration erhält man dann, wie leicht nachgerechnet werden kann,

$$\bar{u}_f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_f(Re^{i\vartheta})\,d\vartheta = \frac{\omega R}{u_0+\bar{u}_f}\frac{2}{\pi}\Big[-\text{Koeff.}(\cos\omega t) + \frac{1}{3}\text{Koeff.}(\cos 3\omega t) - \frac{1}{5}\text{Koeff.}(\cos 5\omega t) + \frac{1}{7}\text{Koeff.}(\cos 7\omega t)\Big]. \quad (13)$$

Dabei beziehen sich die Koeffizienten auf die Zirkulationsverteilung $\Gamma(t)$. Wie man $\bar{u}_f$ richtig abschätzen kann, auch ohne die Zirkulation $\Gamma(t)$ vorher berechnet zu haben (was ja erforderlich ist), werden wir noch sehen.

6. Zahlenbeispiele unter Verwendung von Formel (12). Äußerlich unterscheidet sich (12) von der früheren Formel (1) durch die Faktoren $\omega R/u_0$ bzw. $\omega R/(u_0+\bar{u}_f)$. Diese haben jedenfalls für alle unsere Beispiele sicher einen Wert, der größer als 2 ist. Es hat sich nun gezeigt, daß mit einem solchen Faktor unser bisher immer verwendetes und in Arbeit I ausführlich beschriebenes Iterationsverfahren zur Bestimmung der Zirkulationsverteilung $\gamma(\psi, t)$ nicht mehr konvergiert. Es ist somit erforderlich, ein anderes Verfahren zur Auflösung der durch Formel (12) modifizierten Integralgleichung (I,6) anzuwenden. Dieses ist zwar nicht so genau wie das frühere Iterationsverfahren und liefert uns außerdem nur $\Gamma(t)$ und nicht $\gamma(\psi, t)$. Für den hier beabsichtigten Zweck, die Unmöglichkeit der Formel (12) zu zeigen, ist es jedoch ausreichend. Nachfolgend sei das Verfahren kurz erläutert.

Wir setzen die Zirkulationsverteilung in der Form an

$$\overset{(1)}{\Gamma}(t) = \Gamma_0 + A\cos\omega t + B\sin\omega t + C\cos 2\omega t + D\sin 2\omega t \quad (\Gamma_0 = \text{konst.}) \quad (14)$$

mit unbestimmt bleibenden Koeffizienten A, B, C, D. Dann ergibt sich an Stelle von (I,13) speziell

$$\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\overset{(1)}{\dot{\Gamma}}\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\frac{\cdots}{\cdots}\,d\vartheta\,d\chi = (1{,}70\,A - C)\cos\Phi + A\cos 2\Phi + \frac{1}{3}A\cos 3\Phi - 0{,}033\,A\cos 5\Phi + 1{,}366\,D\sin 2\Phi + D\sin 3\Phi + 0{,}366\,D\sin 4\Phi + h(t)\,[B - 0{,}789\,D + 0{,}211\,D\cos 2\Phi + D\cos 3\Phi + 0{,}789\,D\cos 4\Phi - 0{,}211\,D\cos 6\Phi - (0{,}789\,A + C)\sin\Phi - A\sin 2\Phi - 0{,}577\,A\sin 3\Phi + 0{,}212\,A\sin 5\Phi].$$

Dieses wird in die Integralgleichung (I,14) eingesetzt, wobei der Faktor $\omega R/(u_0+\bar{u}_f)$ nicht vergessen werden darf. Darauf wird ein Iterationsschritt genau in der bisherigen Weise durchgerechnet. Das Ergebnis ist eine Zirkulationsverteilung $\overset{(2)}{\Gamma}(t)$, deren Koeffizienten lineare Funktionen der noch freien Konstanten A, B, C, D sind. Das absolute von der Zeit unabhängige Glied wird dabei gleich dem ebenfalls noch freien Γ_0 aus (14) gesetzt. Nunmehr werden A, B, C, D durch die Bedingung

$$\sum_{n=0}^{11}\left[\overset{(2)}{\Gamma}\left(\frac{n\pi}{6\omega}\right) - \overset{(1)}{\Gamma}\left(\frac{n\pi}{6\omega}\right)\right]^2 = \text{Minimum} \quad (15)$$

bestimmt. Als endgültige Zirkulationsverteilung wird dann

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2}\overset{(1)}{\Gamma}(t) + \frac{1}{2}\overset{(2)}{\Gamma}(t)$$

genommen.

Als Zahlenbeispiele haben wir die Beispiele 1* und 4* gewählt. Diese Bezeichnung soll bedeuten, daß diese Beispiele sonst ganz mit den früheren 1 und 4 übereinstimmen, nur daß jetzt an Stelle von (1) die Formel (12) für das Geschwindigkeitsfeld der freien Wirbel verwendet wird.

Nun sollte in Formel (12) ja, wie bereits gesagt, der induzierte Fortschrittsgrad eingesetzt werden. Dazu bedarf es der Kenntnis von $\bar{u}_f$, das ja wieder von der gerade erst zu berechnenden

Zirkulationsverteilung abhängt. Das Problem erscheint also schwierig, jedoch hat es sich gezeigt, daß $\bar{u}_f$ weitgehend unabhängig von dem Faktor $\omega R/u_0$ bzw. $\omega R/(u_0 + \bar{u}_f)$ in Formel (12) ist. Man erhält eine gute Näherung, wenn man zunächst $\bar{u}_f$ aus dem Ergebnis der Beispiele 1 und 4 bestimmt, denen ja statt (12) die Formel (1) zugrunde lag.

Nach Formel (13) [jetzt ohne den Faktor $\omega R/(u_0 + \bar{u}_f)$] ergibt sich für Beispiel 1: $\bar{u}_f = 0{,}93$, und für Beispiel 4: $\bar{u}_f = 0{,}32$.

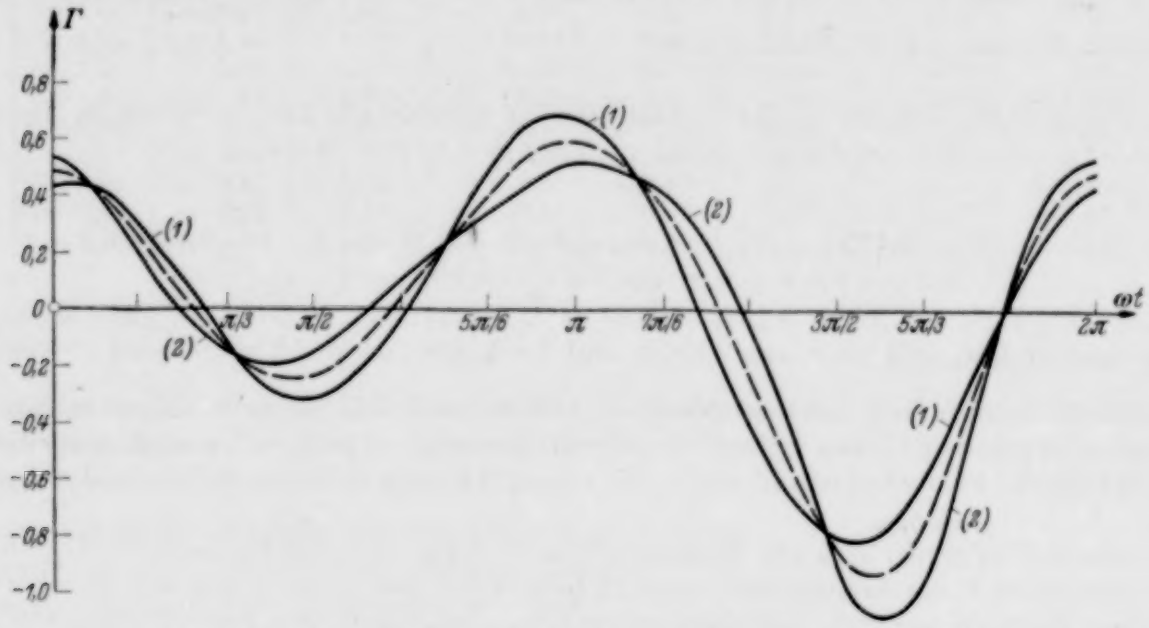


Abb. 6. Beispiel 1*: Die beiden sich aus der Bedingung (15) ergebenden Zirkulationsverteilungen $\overset{(1)}{\Gamma}$ und $\overset{(2)}{\Gamma}$ und ihr als Näherungslösung verwendeter Mittelwert Γ (gestrichelt).

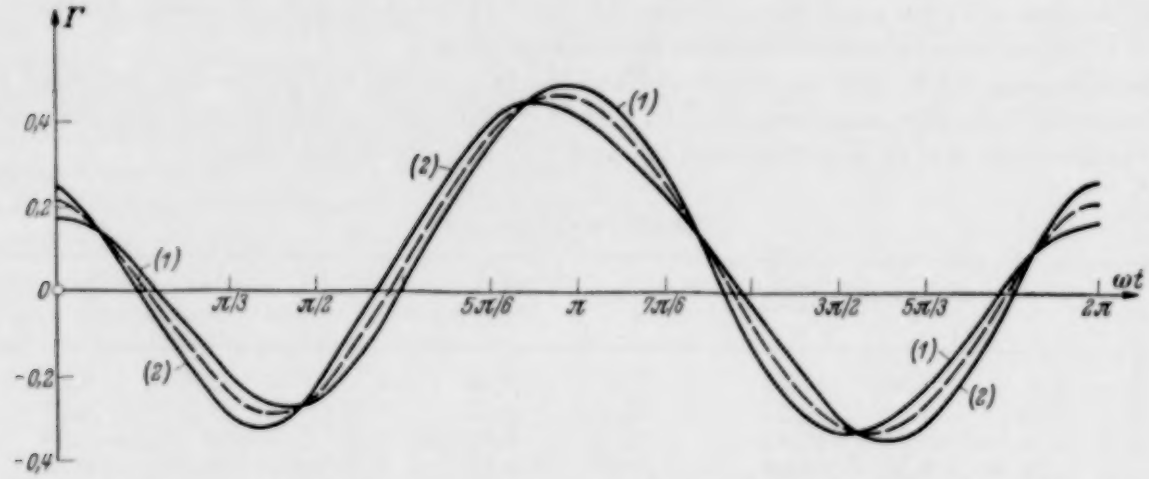


Abb. 7. Beispiel 4*: Die beiden sich aus der Bedingung (15) ergebenden Zirkulationsverteilungen $\overset{(1)}{\Gamma}$ und $\overset{(2)}{\Gamma}$ und ihr als Näherungslösung verwendeter Mittelwert Γ (gestrichelt).

Wir werden daher setzen bei Beispiel 1*: $\frac{\omega R}{u_0 + \bar{u}_f} = 8$, bei Beispiel 4*: $\frac{\omega R}{u_0 + \bar{u}_f} = 3$. Gleichung (12) hat also die Form $u_f - i\, v_f = -\frac{i}{2\pi\omega}\, 8 \iint \ldots$ bei Beispiel 1* und $u_f - i\, v_f = -\frac{i}{2\pi\omega} 3 \iint \ldots$ bei Beispiel 4*. Die oben erläuterte Methode zur Bestimmung der Zirkulationsverteilung $\Gamma(t)$ mit der Bedingung (15) liefert folgendes Ergebnis:

Beispiel 1*: $A = -0{,}13$, $B = 0{,}25$, $C = 0{,}57$, $D = 0{,}025$, ferner: $\Gamma_0 = -0{,}01$,

$$\overset{(1)}{\Gamma}(t) = -0{,}01 - 0{,}13 \cos\omega t + 0{,}25 \sin\omega t + 0{,}57 \cos 2\omega t + 0{,}025 \sin 2\omega t,$$

und mit den Werten für A, B, C, D wird

$$\overset{(2)}{\Gamma}(t) = -0{,}01 - 0{,}17 \cos\omega t + 0{,}27 \sin\omega t + 0{,}53 \cos 2\omega t + 0{,}125 \sin 2\omega t + 0{,}20 \cos 3\omega t - 0{,}12 \sin 3\omega t - 0{,}06 \sin 4\omega t - 0{,}025 \cos 5\omega t.$$

Also wird

$$\Gamma(t) = -0{,}01 - 0{,}15\cos\omega t + 0{,}26\sin\omega t + 0{,}55\cos 2\omega t + 0{,}075\sin 2\omega t + 0{,}10\cos 3\omega t - 0{,}06\sin 3\omega t - 0{,}03\sin 4\omega t - 0{,}01\cos 5\omega t. \quad (16)$$

Beispiel 4*: $A = -0{,}173$, $B = 0{,}043$, $C = 0{,}315$, $D = -0{,}037$, ferner $\Gamma_0 = 0{,}02$.

$$\overset{(1)}{\Gamma}(t) = 0{,}02 - 0{,}173\cos\omega t + 0{,}043\sin\omega t + 0{,}315\cos 2\omega t - 0{,}037\sin 2\omega t,$$

und mit den Werten von A, B, C, D wird

$$\overset{(2)}{\Gamma}(t) = 0{,}02 - 0{,}180\cos\omega t + 0{,}049\sin\omega t + 0{,}304\cos 2\omega t - 0{,}046\sin 2\omega t + 0{,}094\cos 3\omega t + 0{,}017\sin 3\omega t + 0{,}010\cos 4\omega t.$$

Also wird

$$\Gamma(t) = 0{,}02 - 0{,}175\cos\omega t + 0{,}045\sin\omega t + 0{,}31\cos 2\omega t - 0{,}04\sin 2\omega t + 0{,}045\cos 3\omega t + 0{,}01\sin 3\omega t + 0{,}005\cos 4\omega t. \quad (17)$$

Wie man unmittelbar und auch aus Abb. 6 und 7 erkennt, ist der Unterschied zwischen $\overset{(1)}{\Gamma}$ und $\overset{(2)}{\Gamma}$ bei beiden Beispielen nicht sehr erheblich, so daß (16) und (17) als gute Näherungslösungen angesehen werden können. Dazu haben wir allerdings noch zu prüfen, ob auch der zunächst geschätzte induzierte Fortschrittsgrad durch die beiden Lösungen (16) und (17) wieder reproduziert wird.

Aus Formel (13) ergibt sich für Beispiel 1*: $\bar{u}_f = 0{,}94$; und für Beispiel 4*: $\bar{u}_f = 0{,}36$. Das bedeutet induzierte Fortschrittsgrade von 0,12 bzw. 0,34, und diese Werte stimmen befriedigend mit den zur Bestimmung der Zirkulationsverteilung zugrunde gelegten Werten 1/8 bzw. 1/3 überein.

Die erhaltenen Zirkulationsverteilungen (16) und (17) sind jedoch, wie man ohne weiteres aus Abb. 6 und 7 erkennt, physikalisch unsinnig, wie wir auch schon in Ziff. 5 bemerkt hatten. Trotzdem werden wir nun noch die sich aus (16)und (17) ergebenden Propellerkräfte berechnen. Auch hier wird ein unmögliches Ergebnis herauskommen.

Zur Berechnung der Kräfte an den Propellerflügeln wenden wir genau das bisherige Verfahren an; der Druckmittelpunkt wird wie in Ziff. 4 in der Mitte des Flügelprofils angenommen[1].

Man erhält dann das in den Tabellen 24 und 25 enthaltene Ergebnis

Tabelle 24 (Beispiel 1*)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	U	V	result. Geschw. w	Richtung von w	Profilzirkulation Γ	result. Kraft K	Richtung von K	K_x	K_y
0°	+ 3,92	— 16,98	17,43	— 77,0°	+ 0,48	8,37	+ 13,0°	+ 8,16	+ 1,88
30°	+ 11,38	— 12,98	17,27	— 48,8°	+ 0,25	4,32	+ 41,2°	+ 3,25	+ 2,85
60°	+ 15,74	— 7,25	17,33	— 24,7°	— 0,15	2,60	— 114,7°	— 1,09	— 2,36
90°	+ 16,08	— 0,62	16,09	— 2,2°	— 0,24	3,86	— 92,2°	— 0,15	— 3,86
120°	+ 15,02	+ 6,46	16,35	+ 23,3°	+ 0,03	0,49	+ 113,3°	— 0,19	+ 0,45
150°	+ 10,71	+ 12,73	16,63	+ 49,9°	+ 0,42	6,98	+ 139,9°	— 5,34	+ 4,50
180°	+ 3,44	+ 16,62	16,97	+ 78,3°	+ 0,60	10,18	+ 168,3°	— 9,97	+ 2,07
210°	— 5,54	+ 16,38	17,29	+ 108,7°	+ 0,35	6,05	— 161,3°	— 5,73	— 1,94
240°	— 13,78	+ 11,24	17,79	+ 140,8°	— 0,24	4,27	+ 50,8°	+ 2,70	+ 3,31
270°	— 18,48	+ 1,46	18,54	+ 175,5°	— 0,88	16,31	+ 85,5°	+ 1,28	+ 16,26
300°	— 11,62	— 10,09	15,39	— 139,0°	— 0,78	12,00	+ 131,0°	— 7,87	+ 9,06
330°	— 4,27	— 16,95	17,48	— 104,1°	+ 0,04	0,70	— 14,1°	+ 0,68	— 0,17

Für die resultierenden Gesamtkräfte ergeben sich dann als Mittelwerte der beiden aus den Tabellen berechenbaren Propellerstellungen 0 und $\pi/6$:

Beispiel 1*: $K_x^{(P)} = -7{,}13\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K_y^{(P)} = +16{,}02\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K^{(P)} = 17{,}53\,\varrho\,u_0^2\,R$,

Richtung: $\beta_K = +114{,}0°$.

[1] Dieses ist hier naheliegend, da ein Druckmittelpunkt nach Formel (I, 40) nicht berechnet werden kann; denn $\gamma(\psi, t)$ ist ja nicht bekannt. Rechnet man übrigens mit den ψ_0-Werten der Beispiele 1 und 4, so ist das Ergebnis für die resultierenden Kräfte nur unwesentlich von dem aus sich Tabelle (24) und (25) ergebenden abweichend.

Tabelle 25 (Beispiel 4*)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	U	V	result. Geschw. w	Richtung von w	Profilzirkulation Γ	result. Kraft K	Richtung von K	K_x	K_y
0°	+ 2,06	— 4,02	4,52	— 62,9°	+ 0,21	0,95	+ 27,1°	+ 0,86	+ 0,43
30°	+ 4,12	— 3,14	5,18	— 37,3°	+ 0,02	0,10	+ 52,7°	+ 0,06	+ 0,08
60°	+ 5,03	— 1,88	5,37	— 20,5°	— 0,26	1,40	— 110,5°	— 0,49	— 1,31
90°	+ 4,60	— 0,39	4,62	— 4,9°	— 0,25	1,15	— 94,9°	— 0,10	— 1,15
120°	+ 4,53	+ 1,36	4,73	+ 16,7°	+ 0,07	0,33	+ 106,7°	— 0,09	+ 0,32
150°	+ 3,56	+ 3,08	4,71	+ 40,9°	+ 0,39	1,84	+ 130,9°	— 1,20	+ 1,39
180°	+ 1,67	+ 4,14	4,46	+ 68,0°	+ 0,47	2,10	+ 158,0°	— 1,95	+ 0,79
210°	— 0,64	+ 4,02	4,07	+ 99,0°	+ 0,26	1,06	— 171,0°	— 1,05	— 0,17
240°	— 2,61	+ 2,61	3,69	+ 135,0°	— 0,08	0,30	+ 45,0°	+ 0,21	+ 0,21
270°	— 3,51	+ 0,27	3,52	+ 175,6°	— 0,32	1,13	+ 85,6°	+ 0,09	+ 1,13
300°	— 2,32	— 2,22	3,21	— 136,3°	— 0,27	0,87	+ 133,7°	— 0,60	+ 0,63
330°	— 0,29	— 3,84	3,85	— 94,3°	+ 0,03	0,12	— 4,3°	+ 0,12	— 0,01

Beispiel 4*: $K_x^{(P)} = -2{,}07\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K_y^{(P)} = +1{,}17\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K^{(P)} = 2{,}38\,\varrho\,u_0^2\,R$,

Richtung: $\beta_K = +150{,}5°$.

Und dieses Ergebnis ist in der Tat unsinnig, sowohl was die Richtung der resultierenden Kraft $K^{(P)}$ als auch was ihre Größe anbetrifft. Letztere beträgt nur 25% bzw. 40% der für Beispiel 1 und 4 errechneten Werte (vgl. S. 159).

7. Voith-Schneider-Propeller mit vier Flügeln. Die gesamte in der ersten Arbeit entwickelte Theorie sowie auch die in der vorliegenden Arbeit berechneten Beispiele bezogen sich auf Voith-Schneider-Propeller mit sechs Flügeln. Es ist jedoch ohne weiteres möglich, die dargelegte Theorie auch für Voith-Schneider-Propeller mit vier Flügeln (Abb. 8) anzuwenden. An den grundsätzlichen Gedankengängen ändert sich dabei überhaupt nichts, wie man ohne Schwierigkeit einsieht. Jedoch haben einige der abgeleiteten Formeln eine etwas andere Gestalt. Diese leicht zu überblickenden Änderungen stellen wir nachfolgend kurz zusammen. Damit ist dann die in der ersten Arbeit entwickelte Theorie auch noch in dieser Hinsicht vervollständigt.

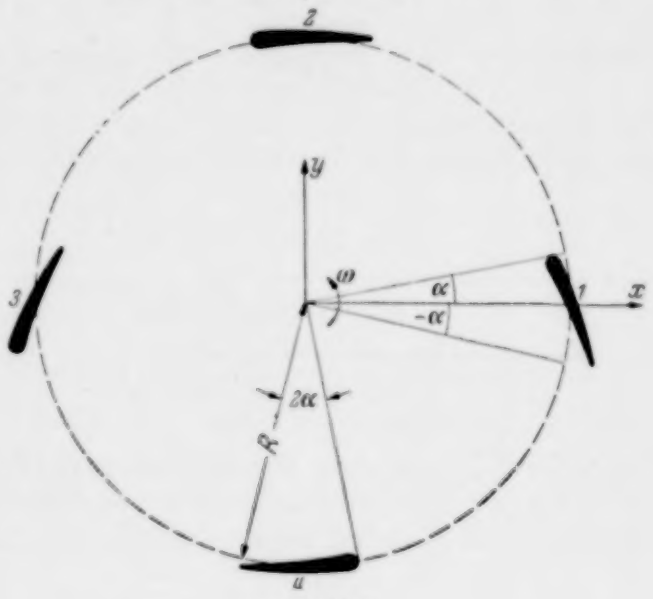


Abb. 8.

An die Stelle von Formel (I,1) tritt

$$u_\gamma - i\,v_\gamma = \frac{i}{2\pi}\sum_{q=1}^{4}\int_{-\alpha}^{\alpha}\gamma\left(\psi, t+\frac{q-1}{2}\frac{\pi}{\omega}\right)\frac{R\,d\psi}{re^{i\varphi}-Re^{i\left(\psi+\frac{q-1}{2}\pi+\omega t\right)}}. \tag{18}$$

An Stelle der Formel (I,3) bzw. (1) haben wir

$$u_f - i\,v_f = -\frac{i}{2\pi\omega}\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\dot{\Gamma}\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)d\vartheta\,dx}{re^{i\varphi}-Re^{i\vartheta}-x}. \tag{19}$$

Dann tritt an die Stelle von (I,6) die Integralgleichung

$$\left.\begin{aligned}&\omega r_0'\cos(\omega t+\lambda) - u_0\cos(\varphi+\omega t) + u_0\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\cdot\sin(\varphi+\omega t)\\ &+\frac{1}{4\pi\omega}\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\dot{\Gamma}\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right)\vdots\vdots\,d\vartheta\,d\chi + \frac{1}{4\pi}\frac{r_0'}{}\cos(\omega t+\lambda)\sum_{q=1}^{4}\Gamma\left(t+\frac{q-1}{2}\frac{\pi}{\omega}\right) =\\ &=\frac{1}{4\pi}\sum_{q=1}^{4}\int_{-\alpha}^{\alpha}\gamma\left(\psi, t+\frac{q-1}{2}\frac{\pi}{\omega}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\varphi-\psi-\frac{q-1}{2}\pi\right)d\psi.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ferner hat die Integralgleichung (I,14) jetzt die Form

$$\left.\begin{aligned} &2\,\omega\,r_0'\cos(\omega t+\lambda)-2\,u_0\cos(\varphi+\omega t)+2\,u_0\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\sin(\varphi+\omega t)\\ &+\frac{2}{3}\sum_{\mu=-6}^{6}\overset{(m)}{c}_{\mu}\,e^{i\mu(\varphi+\omega t)}+\frac{2}{3}\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\sum_{\mu=-6}^{6}\overset{(m)}{k}_{\mu}\,e^{i\mu(\varphi+\omega t)}\\ &+\frac{2}{\pi}\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\left(\overset{(m)}{A}_0+\overset{(m)}{A}_4\,e^{4i\omega t}+\overset{(m)}{\bar{A}}_4\,e^{-4i\omega t}\right)=\\ &=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-7}^{7}\int_{-\lambda}^{\lambda}\overset{(m)}{a}_n(\psi)\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi}{2}+e^{i\frac{\pi}{2}n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi-\frac{\pi}{2}}{2}+\cdots\right.\\ &\qquad\left.+e^{i\frac{3\pi}{2}n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\psi-\frac{3\pi}{2}}{2}\right)e^{in\omega t}\,d\psi. \end{aligned}\right\}\tag{21}$$

Entsprechend ändern sich natürlich auch die Gleichungen (I,15) und (I,16) geringfügig; wir verzichten darauf, diese Änderung hier aufzuschreiben, da der Leser sie ohne weiteres überblicken kann.

Schließlich ergeben sich wieder Integralgleichungen der Form (I,19). Jetzt ist aber an Stelle von (I,20)

$$\left.\begin{aligned} &b_{10}^{(n)}=-2\,i\,\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\pi n}{2}-3\,i\,\operatorname{tg}^3\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\pi n}{2},\\ &b_{20}^{(n)}=\operatorname{tg}^2\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2}(-1)^n+2\cos\frac{\pi n}{2}\right)+4\operatorname{tg}^4\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\pi n}{2},\\ &b_{11}^{(n)}=-2\operatorname{tg}^2\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2}(-1)^n+2\cos\frac{\pi n}{2}\right)-6\operatorname{tg}^4\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\pi n}{2},\\ &b_{30}^{(n)}=-i\operatorname{tg}^3\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\pi n}{2},\qquad b_{31}^{(n)}=-3\operatorname{tg}^4\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\pi n}{2},\\ &b_{21}^{(n)}=4\,i\operatorname{tg}^3\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\pi n}{2},\qquad b_{13}^{(n)}=-\operatorname{tg}^4\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\pi n}{2},\\ &b_{12}^{(n)}=-2\,i\operatorname{tg}^3\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\pi n}{2},\qquad b_{22}^{(n)}=3\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi n}{2}. \end{aligned}\right\}\tag{22}$$

Der weitere Lösungsweg für die Integralgleichungen bleibt gegenüber dem in Arbeit I angegebenen völlig unverändert. Insbesondere bleiben die Formeln (I,23) und (I,27) in ihrer Gestalt erhalten. Lediglich hat man an Stelle von (I,24)

$$\Delta_n=1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2}(-1)^n+2\cos\frac{\pi n}{2}\right).\tag{23}$$

Schließlich sei noch erwähnt, daß das Iterationsverfahren zur Bestimmung der Zirkulationsverteilung beim vierflügeligen Propeller wegen des Faktors 2/3 in Formel (19) auch noch für etwas größere Werte von λ konvergiert. Man kann etwa mit $\operatorname{tg}\lambda/2\leqq 1/8$, $\lambda/2\leqq 7^\circ$ rechnen.

8. Zahlenbeispiel mit vier Flügeln. Als letztes soll noch ein Zahlenbeispiel eines Voith-Schneider-Propellers mit vier Flügeln behandelt werden. Wir bezeichnen es als Beispiel 5. Der Anstellwinkel Null der Propellerflügel liege wie in Abb. 8 bei $\pi/2$ und $3\pi/2$. Es sei ferner wieder $\lambda=10^\circ$. Der Fortschrittsgrad sei $u_0/\omega R=1/4$ und die Propellerflügelsteigung $r_0'/R=0{,}5$.

Kurz gesagt, haben wir die gleichen Parameterwerte wie in Beispiel 4, nur sind jetzt bloß vier Flügel vorhanden. Dadurch ergeben sich gute Vergleichsmöglichkeiten zwischen den Ergebnissen der Beispiele 4 und 5.

Mit den angenommenen Werten berechnet man aus (22) und (23)

$$\left.\begin{aligned} &b_{10}^{(1)}=b_{10}^{(5)}=-b_{10}^{(3)}=-0{,}177\,i,\quad b_{10}^{(0)}=b_{10}^{(2)}=b_{10}^{(4)}=b_{10}^{(6)}=0,\\ &b_{20}^{(1)}=b_{20}^{(3)}=b_{20}^{(5)}=-0{,}004,\quad b_{20}^{(0)}=b_{20}^{(4)}=0{,}019,\quad b_{20}^{(2)}=b_{20}^{(6)}=-0{,}012,\\ &b_{30}^{(1)}=b_{30}^{(5)}=-b_{30}^{(3)}=-0{,}001\,i,\quad b_{30}^{(0)}=b_{30}^{(2)}=b_{30}^{(4)}=b_{30}^{(6)}=0,\\ &b_{21}^{(n)}=-4\,b_{30}^{(n)},\quad b_{12}^{(n)}=2\,b_{30}^{(n)}, \end{aligned}\right\}\tag{24}$$

$$\Delta_1=\Delta_3=\Delta_5=1{,}004,\quad \Delta_0=\Delta_4=0{,}981,\quad \Delta_2=\Delta_6=1{,}011.\tag{25}$$

Die Formeln (I,37) können unverändert beibehalten werden.

Das bekannte Iterationsverfahren liefert dann folgende Zirkulationsverteilung:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(t) = {} & 0{,}027 - 0{,}632\cos\omega t - 0{,}030\sin\omega t + 0{,}254\cos 2\omega t - 0{,}185\sin 2\omega t + \\ & + 0{,}050\cos 3\omega t + 0{,}020\sin 3\omega t - 0{,}012\cos 4\omega t + 0{,}003\sin 4\omega t \\ & - 0{,}007\cos 5\omega t + 0{,}006\sin 5\omega t - 0{,}008\cos 6\omega t + 0{,}015\sin 6\omega t\,.\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma(\psi, t) = {} & 0{,}098\sqrt{1-\frac{\psi^2}{\alpha^2}} + \sqrt{\frac{\alpha+\psi}{\alpha-\psi}}\left[\left(-1{,}128 + 0{,}004\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}048\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos\omega t\right. \\ & + \left(0{,}196 - 0{,}508\,\frac{\psi}{\alpha} + 0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin\omega t + \left(0{,}488 - 0{,}020\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}032\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 2\omega t \\ & + \left(-0{,}250 - 0{,}180\,\frac{\psi}{\alpha} + 0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 2\omega t + \left(0{,}076 + 0{,}048\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 3\omega t \\ & + \left(0{,}066 - 0{,}044\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 3\omega t + \left(-0{,}036 + 0{,}028\,\frac{\psi}{\alpha}\right)\cos 4\omega t \\ & + \left(-0{,}002 + 0{,}028\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}016\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 4\omega t + \left(-0{,}020 + 0{,}008\,\frac{\psi}{\alpha} + 0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\cos 5\omega t \\ & + \left(0{,}004 + 0{,}012\,\frac{\psi}{\alpha}\right)\sin 5\omega t + \left(-0{,}028 + 0{,}028\,\frac{\psi}{\alpha}\right)\cos 6\omega t\,. \\ & \left. + \left(0{,}028 + 0{,}008\,\frac{\psi}{\alpha} - 0{,}008\,\frac{\psi^2}{\alpha^2}\right)\sin 6\omega t\right].\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Auch hier sind die Zirkulation und sämtliche Geschwindigkeiten in Einheiten von u_0, die Kräfte in Einheiten von $\varrho\, u^2\, R$ und die Momente in Einheiten von $\varrho\, u^2\, R^2$ angegeben.

Genau wie früher (vgl. Ziff. 8 der Arbeit I) wurden die einzelnen Geschwindigkeitsanteile berechnet, aus denen sich die resultierende Geschwindigkeit w (relativ zum Propellerflügel) zusammensetzt. Das Ergebnis zeigt Tabelle 26.

Tabelle 26 (Beispiel 5)

ωt	$\Sigma' u_\Gamma$	$\Sigma' v_\Gamma$	u_f	v_f	$-u_\omega$	$-v_\omega$	u_s
0	+ 0,007	— 0,031	+ 0,667	+ 0,057	0,00	— 4,00	+ 1,00
$\frac{\pi}{6}$	— 0,020	— 0,073	+ 0,749	+ 0,027	+ 2,00	— 3,464	+ 1,00
$\frac{\pi}{3}$	+ 0,010	— 0,107	+ 0,480	— 0,129	+ 3,464	— 2,00	+ 1,00
$\frac{\pi}{2}$	+ 0,027	— 0,094	— 0,101	— 0,287	+ 4,00	0,00	+ 1,00
$\frac{2\pi}{3}$	+ 0,025	— 0,084	+ 0,124	— 0,303	+ 3,464	+ 2,00	+ 1,00
$\frac{5\pi}{6}$	+ 0,025	— 0,084	+ 0,282	— 0,184	+ 2,00	+ 3,464	+ 1,00
π	+ 0,007	— 0,063	+ 0,274	+ 0,054	0,00	+ 4,00	+ 1,00
$\frac{7\pi}{6}$	— 0,031	— 0,054	+ 0,172	+ 0,186	— 2,00	+ 3,464	+ 1,00
$\frac{4\pi}{3}$	— 0,043	— 0,076	+ 0,036	+ 0,211	— 3,464	+ 2,00	+ 1,00
$\frac{3\pi}{2}$	— 0,020	— 0,094	— 0,071	+ 0,172	— 4,00	0,00	+ 1,00
$\frac{5\pi}{3}$	+ 0,013	— 0,090	+ 0,174	+ 0,079	— 3,464	— 2,00	+ 1,00
$\frac{11\pi}{6}$	+ 0,041	— 0,056	+ 0,428	+ 0,067	— 2,00	— 3,464	+ 1,00

Aus Tabelle 26 entnimmt man die Geschwindigkeiten U, V und $w = \sqrt{U^2 + V^2}$. Die Richtung von w gibt $\beta = \text{arc tg}\, V/U$ an (gegen die positive x-Achse gemessen). Das Ergebnis ist in Tabelle 27 enthalten.

Tabelle 27 (Beispiel 5)

ωt	U	V	w	β	ωt	U	V	w	β
0	+ 1,674	— 3,974	4,31	— 67,1°	π	+ 1,281	+ 3,991	4,19	+ 72,2°
$\frac{\pi}{6}$	+ 3,729	— 3,510	5,12	— 43,2°	$\frac{7\pi}{6}$	— 0,859	+ 3,596	3,69	+ 103,5°
$\frac{\pi}{3}$	+ 4,954	— 2,236	5,43	— 24,3°	$\frac{4\pi}{3}$	— 2,471	+ 2,135	3,26	+ 139,2°
$\frac{\pi}{2}$	+ 4,926	— 0,381	4,94	— 4,4°	$\frac{3\pi}{2}$	— 3,091	+ 0,078	3,09	+ 178,5°
$\frac{2\pi}{3}$	+ 4,613	+ 1,613	4,89	+ 19,3°	$\frac{5\pi}{3}$	— 2,277	— 2,011	3,04	— 138,6°
$\frac{5\pi}{6}$	+ 3,307	+ 3,196	4,60	+ 44,0°	$\frac{11\pi}{6}$	— 0,531	— 3,453	3,49	— 98,8°

Die Berechnung des Druckmittelpunktes nach Formel (I,40) liefert das in Tabelle 28 wiedergegebene Ergebnis.

Tabelle 28 (Beispiel 5)

ωt	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
φ_0/α	0,52	0,67	0,65	0,75	0,39	0,45	0,48	0,51	0,77	0,22	0,25	0,35

In der Tabelle 29 sind die resultierenden Kräfte an den Propellerflügeln und alle zu ihrer Berechnung erforderlichen Größen zusammengestellt. Dabei ist die resultierende Geschwindigkeit w im Druckmittelpunkt nach Größe und Richtung mit Hilfe der Tabelle 27 interpoliert.

Tabelle 29 (Beispiel 5)

Lage des Profilmittelpunktes	Lage des Druckmittelpunktes	result. Geschw. W im Druckmittelpunkt	Richtung von w im Druckmittelpunkt	Profilzirkulation Γ	Größe der result. Kraft K	Richtung der result. Kraft K	Richtung des Propellerflügelprofiles
0°	5,2°	4,44	— 62,9°	— 0,328	1,456	— 152,9°	— 63,4°
30°	36,7°	5,19	— 39,1°	— 0,522	2,709	— 129,1°	— 36,6°
60°	66,5°	5,30	— 20,2°	— 0,665	3,524	— 110,2°	— 16,0°
90°	97,5°	4,93	+ 1,6°	— 0,275	1,356	— 88,4°	0,0°
120°	123,9°	4,85	+ 22,5°	+ 0,399	1,935	+ 112,5°	+ 16,0°
150°	154,5°	4,54	+ 48,2°	+ 0,874	3,968	+ 138,2°	+ 36,6°
180°	184,8°	4,10	+ 77,2°	+ 0,850	3,485	+ 167,2°	+ 63,4°
210°	215,1°	3,60	+ 109,6°	+ 0,544	1,958	— 160,4°	+ 96,6°
240°	247,7°	3,21	+ 149,3°	+ 0,135	0,433	— 120,7°	+ 136,0°
270°	272,2°	3,09	— 178,4°	— 0,187	0,578	+ 91,6°	0,0°
300°	302,5°	3,06	— 135,4°	— 0,277	0,848	+ 134,6°	— 136,0°
330°	333,5°	3,57	— 95,1°	— 0,224	0,800	+ 174,9°	— 96,6°

Die Zerlegung der resultierenden Kräfte K in ihre x und y-Komponenten sowie die Berechnung des Drehmomentes nach Formel (2) liefert das in Tabelle 30 enthaltene Ergebnis:

Tabelle 30 (Beispiel 5)

Mittelpunkt des Flügelprofils	K_x	K_y	M	Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M
0°	— 1,29	— 0,66	— 0,54	180°	— 3,39	+ 0,77	— 1,05
30°	— 1,70	— 2,10	— 0,66	210°	— 1,84	— 0,66	— 0,52
60°	— 1,21	— 3,30	— 0,20	240°	— 0,22	— 0,37	— 0,06
90°	+ 0,04	— 1,36	+ 0,14	270°	— 0,02	+ 0,58	+ 0,01
120°	— 0,74	+ 1,79	— 0,38	300°	— 0,59	+ 0,60	— 0,18
150°	— 2,95	+ 2,64	— 1,11	330°	— 0,80	+ 0,07	— 0,29

Als Mittelwerte der drei nach Tabelle 30 berechenbaren Propellerstellungen 0, $\pi/6$ und $\pi/3$ erhalten wir für die resultierenden Gesamtkräfte, das Gesamtmoment und den Wirkungsgrad des behandelten Voith-Schneider-Propellers (Beispiel 5)

$$K_x^{(P)} = -4{,}90\,\varrho\,u_0^2\,R\,, \quad K_y^{(P)} = -0{,}67\,\varrho\,u_0^2\,R\,, \quad K^{(P)} = 4{,}95\,\varrho\,u_0^2\,R\,,$$

Richtung $\beta_K = -172{,}2°$

$$M^{(P)} = -1{,}61\,\varrho\,u_0^2\,R^2\,, \quad \eta = 0{,}77\,.$$

Auch hier ist die resultierende Propellerkraft nicht genau entgegengesetzt zur Anströmung gerichtet, sondern bildet mit dieser einen Winkel von 7,8°.

Mit Hilfe der in Ziff. 9 der Arbeit I angegebenen Methode soll nun noch untersucht werden, an welcher Stelle der Anstellwinkel Null der Propellerflügel (gegenüber der Kreisbahn) liegen muß, um genaue Vorwärtsfahrt zu erreichen. Das Ergebnis der Untersuchung gibt Tabelle 31 wieder; ausnahmsweise ist die zusätzliche Zirkulation Γ^* in Einheiten von v_0 und die Zusatzkraft K^* in Einheiten von $\varrho\,u_0\,v_0\,R$ angegeben.

Tabelle 31 (Beispiel 5)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	Zusätzliche Zirkulation Γ^*	K_x^*	K_y^*	Mittelpunkt des Flügelprofiles	Zusätzliche Zirkulation Γ^*	K_x^*	K_y^*
0°	+ 0,42	+ 1,66	+ 0,86	180°	+ 0,82	— 3,28	+ 0,72
30°	+ 0,80	+ 2,62	+ 3,22	210°	+ 0,14	— 0,47	— 0,18
60°	+ 0,93	+ 1,74	+ 4,61	240°	— 0,65	+ 1,02	+ 1,83
90°	+ 1,00	0,00	+ 4,95	270°	— 1,12	— 0,18	+ 3,46
120°	+ 1,10	— 1,91	+ 5,01	300°	— 0,94	— 2,05	+ 2,02
150°	+ 1,12	— 3,77	+ 3,45	330°	— 0,27	— 0,97	+ 0,08

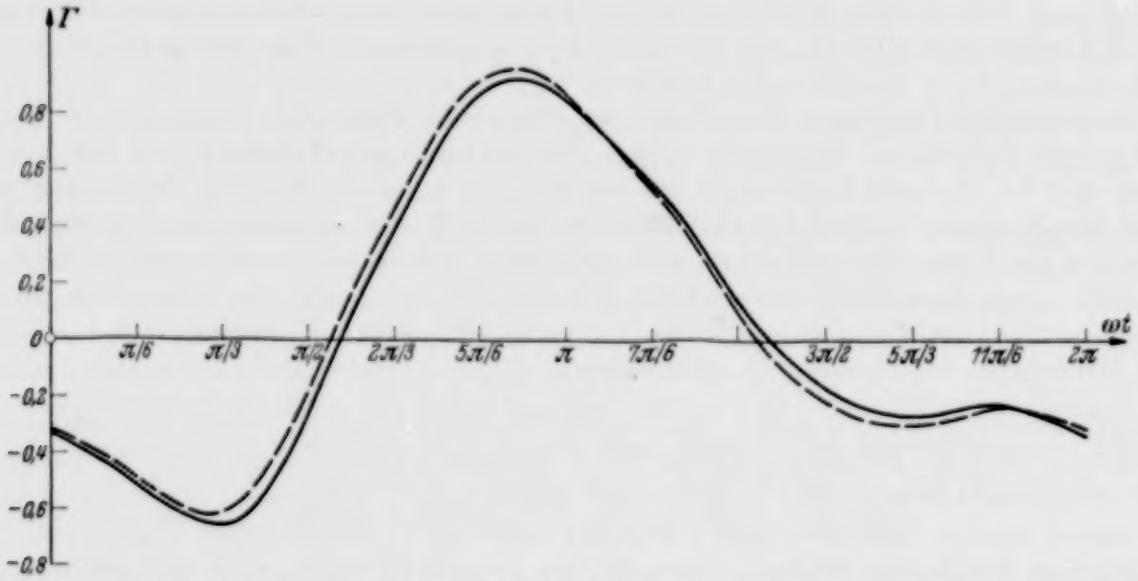


Abb. 9. Beispiel 5: Zirkulationsverteilung Γ (glatt) und Zirkulationsverteilung $\Gamma + \Gamma^*$ für genaue Vorwärtfahrt (gestrichelt).

Als resultierende Gesamtkräfte einschließlich der eben angegebenen Zusatzkräfte ergibt sich somit

$$K_x^{(P)} = -\left(4{,}90 + 1{,}86\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\,u_0^2\,R\,, \qquad K_y^{(P)} = -\left(0{,}67 - 10{,}01\,\frac{v_0}{u_0}\right)\varrho\,u_0^2\,R\,,$$

und aus der Bedingung für die genaue Vorwärtsfahrt $K_y^{(P)}/K_x^{(P)} = v_0/u_0$ folgt

$$\frac{v_0}{u_0} = 0{,}045\,, \qquad \text{arc tg}\,\frac{v_0}{u_0} = 2{,}6°$$

und somit

$$K_x^{(P)} = -4{,}98\,\varrho\,u_0^2\,R\,, \quad K_y^{(P)} = -0{,}22\,\varrho\,u_0^2\,R\,, \quad K^{(P)} = 4{,}99\,\varrho\,u_0^2\,R\,.$$

Um bei Anströmung in x-Richtung genaue Vorwärtsfahrt zu erreichen, muß also der Anstellwinkel Null der Propellerflügel an den Stellen 87,4° und 267,4° liegen.

Die Zirkulationsverteilung der genauen Vorwärtsfahrt $\Gamma + \Gamma^*$ ist durch die gestrichelte Kurve in Abb. 9 dargestellt. Die glatt ausgezogene Kurve stellt die ursprüngliche Zirkulationsverteilung nach Formel (26) dar.

In Analogie zu unseren Untersuchungen aus Ziff. 4 der vorliegenden Arbeit wurden nun noch die Kräfte an den Propellerflügeln mit der Annahme berechnet, daß der Druckmittelpunkt mit dem Profilmittelpunkt zusammenfalle (abgerundete, symmetrische Profile). Dabei wurde die bisherige Zirkulationsverteilung beibehalten, und für die Geschwindigkeit w die Werte aus Tabelle 27 verwendet.

Das Ergebnis zeigt die Tabelle 32.

Tabelle 32 (Beispiel 5)

Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M	Mittelpunkt des Flügelprofiles	K_x	K_y	M
0°	— 1,30	— 0,55	— 0,55	180°	— 3,39	+ 1,09	— 1,09
30°	— 1,82	— 1,94	— 0,77	210°	— 1,95	— 0,47	— 0,57
60°	— 1,48	— 3,29	— 0,36	240°	— 0,28	— 0,33	— 0,08
90°	— 0,10	— 1,35	+ 0,10	270°	+ 0,02	+ 0,58	+ 0,02
120°	— 0,64	+ 1,84	— 0,36	300°	— 0,55	+ 0,63	— 0,16
150°	— 2,79	+ 2,89	— 1,10	330°	— 0,77	+ 0,12	— 0,28

Für die resultierenden Gesamtkräfte, das Gesamtmoment und den Wirkungsgrad des Voith-Schneider-Propellers ergibt sich (als Mittelwert der drei aus Tabelle 32 berechenbaren Propellerstellungen 0, $\pi/6$ und $\pi/3$

$$K_x^{(P)} = -5{,}02\,\varrho\,u_0^2\,R\,,\quad K_y^{(P)} = -0{,}26\,\varrho\,u_0^2\,R\,,\quad K^{(P)} = 5{,}02\,\varrho\,u_0^2\,R\,,\quad \text{Richtung } \beta_K = -177°,$$
$$M^{(P)} = -1{,}73\,\varrho\,u_0^2\,R\,,\quad \eta = 0{,}72\,.$$

Auch in diesem Fall ist der Winkel zwischen Anströmrichtung und resultierender Gesamtkraft um fast 5° kleiner geworden (s. S. 159). Bei etwas gesunkenem Wirkungsgrad ist die Größe der Gesamtkraft praktisch unverändert geblieben.

Ein Vergleich der Ergebnisse des 4flügeligen Propellers (Beispiel 5) mit denen des entsprechenden 6flügeligen Propellers (Beispiel 4) zeigt: Die Strömungsverhältnisse sind für den einzelnen Propellerflügel bei Beispiel 5 günstiger als bei Beispiel 4, da die Propellerflügel sich gegenseitig weniger stören und der Einfluß der abfließenden, freien Wirbel geringer ist. So liefert der 4flügelige Propeller auch eine Vortriebskraft von etwa 86% derjenigen des 6flügeligen Propellers und nicht nur 67%, wie man vielleicht erwarten könnte. Dagegen sind die Schwankungen der resultierenden Vortriebskraft um ihren Mittelwert beim 4flügeligen Propeller doch merklich größer als beim 6flügeligen, nämlich $\pm$ 5% gegenüber $\pm$ 1%.

9. Zusammenfassung. In dieser und in der vorhergehenden Arbeit, die ein einheitliches Ganzes bilden, wird die Strömung durch Voith-Schneider-Propeller als ebene Potentialströmung nach der Singularitätenmethode (Zirkulationsverteilungen) behandelt. Die entwickelte Theorie wird an verschiedenen Zahlenbeispielen erprobt und liefert befriedigende Ergebnisse.

Für das von den freien Wirbeln erzeugte Geschwindigkeitsfeld wird eine neuartige Darstellung angewendet, da eine nach der bisher üblichen Theorie abgeleitete Formel zu physikalisch unsinnigen Resultaten führt. Diese Tatsache dürfte auch über das vorliegende spezielle Problem hinaus von allgemeiner Bedeutung sein.

(Eingegangen am 20. Oktober 1955.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *W.-H. Isay*, Berlin-Dahlem, Schweinfurthstr. 90.

Einfluß der Bohrlochgröße auf die Anzeige des statischen Druckes bei verschiedenen *Reynolds*zahlen *

Von A. K. Ray

1. Einleitung. Den statischen Druck einer strömenden Flüssigkeit mißt man am bequemsten, indem man ihn durch eine Bohrung in einer stromlinienparallelen Wand entnimmt und zu einem Druckmeßgerät (Manometer) leitet. Da durch eine solche Bohrung die Strömung in Wandnähe gestört wird, verursacht sie eine Änderung des Druckes, so daß das Meßergebnis mit einem Fehler behaftet ist. Dieser ist um so kleiner, je kleiner die Bohrung ist, und geht gegen Null, wenn der Bohrungsdurchmesser gegen Null geht.

Über die Größe dieses Fehlers liegen Untersuchungen von *G. Fuhrmann*[1], *A. Miyadzu*[2] und *R. Herrmann*[3] vor. Die genannten Forscher veränderten den Bohrungsdurchmesser, trugen den Unterschied der mit diesen verschiedenen Bohrungen und mit einer festen Bohrung erhaltenen Meßwerte abhängig vom Bohrungsdurchmesser auf und extrapolierten auf den Durchmesser Null. *Fuhrmann* fand negative Fehler, die zunächst mit dem Durchmesser ansteigen und bei größeren Bohrungen annähernd konstant werden, wobei sie ein Hundertstel des Staudruckes der Strömungsgeschwindigkeit nicht übersteigen. *Miyadzu* fand positive Fehler, die linear mit dem Bohrungsdurchmesser ansteigen. Er untersuchte weiterhin den Einfluß der Bohrungstiefe und stellte fest, daß der Fehler mit l/d, dem Verhältnis der Bohrungstiefe zum konstanten Bohrungsdurchmesser zunächst anwächst, um dann einen konstanten Endwert zu erreichen. *R. Herrmann*, der Untersuchungen über den Einfluß der Bohrlochgröße auf die statische Druckanzeige im Rahmen seiner Dissertation über den Druckabfall in Rohrleitungen anstellte, fand im allgemeinen positive, mit dem Durchmesser der Bohrung anwachsende Fehler. Nur bei sehr kleiner Bohrungstiefe und einer Erweiterung hinter dem Bohrloch fand er negative Fehler, also Saugwirkung. Ein ähnliches Ergebnis und eine Erklärung dafür wird die vorliegende Untersuchung bringen. *J. Polzin*[4] untersuchte schließlich den Druckfehler in Abhängigkeit von der Rauhigkeit der das Bohrloch umgebenden Wand. Seine Ergebnisse stehen in keiner unmittelbaren Beziehung zur vorliegenden Untersuchung.

Die erwähnten Untersuchungen geben wohl ein Bild der ungefähren Größe des Fehlers und zeigen, wodurch er beeinflußt wird. Sie reichen aber nicht aus, um den Fehler in einem gegebenen Fall wirklich abschätzen zu können. Vor allem sind die Gesetze der Ähnlichkeit und damit zusammenhängend der Einfluß der *Reynolds*schen Zahl nicht hinreichend berücksichtigt worden. Deshalb sollten durch die vorliegende Arbeit gerade diese Lücken ausgefüllt werden. Durch einfache Überlegungen wird zunächst ermittelt, welche Einflüsse auf Grund der Ähnlichkeitsgesetze zu erwarten sind. Dann wird durch Versuche in einem Bereich von *Reynolds*zahlen Re [die mit dem Lochdurchmesser und einer charakteristischen Geschwindigkeit gebildet sind, vgl. Formel (4)] von 3,0 bis 10^3 die Abhängigkeit des Fehlers von Re festgestellt.

2. Theoretische Überlegungen. Die an der Meßbohrung vorbeiströmende Flüssigkeit vermischt sich teilweise mit der in der Bohrung ruhenden Flüssigkeit. Dabei erzeugt sie auch in dieser eine Strömung, die mit der Tiefe der Bohrung abklingt, aber dabei eine Druckänderung Δp bewirkt, die den Fehler bei der Druckmessung darstellt. Unter sonst gleichen Umständen ist diese Druckänderung proportional dem Staudruck der vorbeiströmenden Flüssigkeit. Der Proportionalitätsfaktor selbst hängt aber vom Vermischungsvorgang und dieser von der *Reynolds*schen Zahl der Anordnung ab. Außerdem ist die in der Bohrung entstehende Druckänderung noch von der Tiefe l der Bohrung bzw. von dem Verhältnis l/d der Tiefe zum Bohrungsdurchmesser abhängig.

---

* Gekürzte Wiedergabe des Dissertation der Verfassers, Göttingen 1955.

[1] *G. Fuhrmann*, Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen, Dissertation, Göttingen, 1912, S. 46.

[2] *A. Miyadzu*, Ing.-Arch. 7 (1936), S. 35.

[3] *R. Herrmann*, Experimentelle Untersuchung zum Wiederstandsgesetz des Kreisrohres bei hoher *Reynolds*scher Zahl und großen Anlauflängen, Dissertation, Leipzig 1929.

[4] *J. Polzin*, Ing.-Arch. 10 (1939), S. 326.

Nun besteht an der Wand eine Grenzschicht, in der die Geschwindigkeit vom Wert Null an der Wand allmählich auf die Geschwindigkeit der Außenströmung ansteigt. Ist der Bohrungsdurchmesser sehr groß gegen die Grenzschichtdicke, so spielt die Grenzschicht für den Vermischungsvorgang keine wesentliche Rolle. Bei einer Strömungsgeschwindigkeit V, der Flüssigkeitsdichte ϱ, der kinematischen Zähigkeit ν, sowie einer Bohrung vom Durchmesser d und der Tiefe l müssen wir demnach einen Fehler in der Druckangabe

$$\Delta p = \frac{\varrho}{2} V^2 F\left(\frac{Vd}{\nu}, \frac{l}{d}\right) \tag{1}$$

erwarten, der proportional dem Staudruck $(\varrho/2)\, V^2$, sowie einer Funktion der *Re*-Zahl $V\,d/\nu$ und des Tiefenverhältnisses l/d ist. Ist der Bohrungsdurchmesser d hingegen nicht groß gegen die Grenzschichtdicke δ, so ist für die Vermischung die Geschwindigkeitsverteilung nur in einem Bereich in der Nähe der Wand maßgebend, während Geschwindigkeiten in großem Abstand von der Wand sicher ohne Einfluß bleiben. Da die Geschwindigkeit in der Grenzschicht an der Wand gegen Null geht, so folgt, daß bei hinreichend kleinem Bohrungsdurchmesser der Fehler gegen Null geht, da er ja proportional zu $(\varrho/2)\, V^2$ ist und die maßgebende Geschwindigkeit V gegen Null geht. Wie groß der maßgebende Bereich des Wandabstandes y und damit bei gegebenem Grenzschichtprofil $V(y)$ die maßgebende Geschwindigkeit V ist, muß durch Versuche geklärt werden. Wir wollen zunächst den Fall betrachten, daß die Geschwindigkeit in diesem Bereich linear ansteigt. Diese Näherung ist sicher zutreffend, wenn der Bohrungsdurchmesser d klein gegen die Grenzschichtdicke δ ist. Wie groß d im Vergleich zu δ werden darf, ohne daß diese Näherung unzulässig wird, muß der Versuch lehren. Wir setzen also

$$\frac{dV}{dy} = \text{konst.} \tag{2}$$

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit im Abstand $y = d$ von der Wand mit

$$V_1 = d\frac{dV}{dy}, \tag{3}$$

so ist Ähnlichkeit der Vorgänge zu erwarten, wenn außer dem gleichen Bohrungsverhältnis l/d (geometrische Ähnlichkeit) auch die gleiche *Re*-Zahl

$$Re = \frac{V_1 d}{\nu} = \frac{dV}{dy}\frac{d^2}{\nu} \tag{4}$$

vorliegt. Der Fehler in der Druckanzeige ist dann

$$\Delta p = \frac{\varrho}{2} V_1^2 F = \frac{\varrho}{2} d^2 \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 F, \tag{5}$$

wobei F ein Proportionalitätsfaktor ist, der von der *Re*-Zahl und dem Tiefenverhältnis l/d abhängt:

$$F = F\left(\frac{dV}{dy}\frac{d^2}{\nu}, \frac{l}{d}\right). \tag{6}$$

Ist die Annahme eines linearen Geschwindigkeitsanstiegs in dem maßgebenden Bereich der Grenzschicht nicht mehr zulässig, so kommt noch eine weitere, durch die Form des Grenzschichtprofils gegebene Abhängigkeit von d/δ hinein, wodurch der Fehler Δp mit wachsendem d/δ allmählich der Form nach in (1) übergeht.

Für das Versuchsprogramm wurde zunächst $l/d = 1$ konstant gehalten und die zweite Annahme zugrunde gelegt. Es war daher für dieses Tiefenverhältnis nur die Abhängigkeit des Proportionalitätsfaktors F von der *Re*-Zahl $(dV/dy)\, d^2/\nu$ zu bestimmen, wobei diese in einem Umfang von 10^3 verändert wurde. Einige weitere Messungen sollten die Abhängigkeit von l/d zeigen. Es ergab sich hier ein Verlauf des Fehlers mit l/d in umgekehrtem Sinne wie bei *Miyadzu*. Der Grund für diese Diskrepanz konnte im Rahmen der vorliegenden Arbeit jedoch nicht mehr geklärt werden, da das Hauptaugenmerk auf die Bestimmung von $F(Re)$ bei festgehaltenem l/d gerichtet wurde.

3. Versuchsanordnung. Die Versuchsanordnung ist in Abb. 1 dargestellt. Die Messungen wurden an der unteren Wand des mittleren Teiles *a* eines rechteckigen Aluminiumrohres *b* durchgeführt. Die Versuchsflüssigkeit (Zuckerlösung), die durch die Kreiselpumpe *c* in Bewegung gehalten wurde und durch die beiden Drosselventile *d* und *e* in ihrer Geschwindigkeit zwischen

0,2 m/sec und 3,5 m/sec reguliert werden konnte, strömte unter einem durch den Überlauf *f* stets konstant gehaltenen Druck durch das Rohr. In den mittleren Teil dieses Rohres ist die Meßstrecke *a* eingebaut, die in Abb. 1 im Schnitt gezeigt ist. Die horizontalen Wände der Meßstrecke sind aus Aluminium gefertigt, die vertikalen zur visuellen Beobachtung der Strömung aus Plexiglas.

An der unteren Wand der Meßstrecke wurden an 5 um jeweils 8 cm in Strömungsrichtung voneinander entfernten Stellen je 3 Öffnungen zur Druckmessung gebohrt. Die eine dieser 3 Öffnungen lag in der Rohrmittelebene, die beiden anderen symmetrisch dazu um je 1 cm von der Mittelebene entfernt (Schnitt *A—B* in Abb. 1). Von den beiden äußeren Bohrungen ist die eine das Versuchsloch, die andere das Vergleichsloch, wobei die Lage von Versuchs- bzw. Vergleichsloch abwechselnd von rechts nach links wechselte. Die dritte, mittlere Öffnung hat die gleiche Größe wie das Vergleichsloch und wurde dazu benutzt nachzuprüfen, ob die Druckanzeige

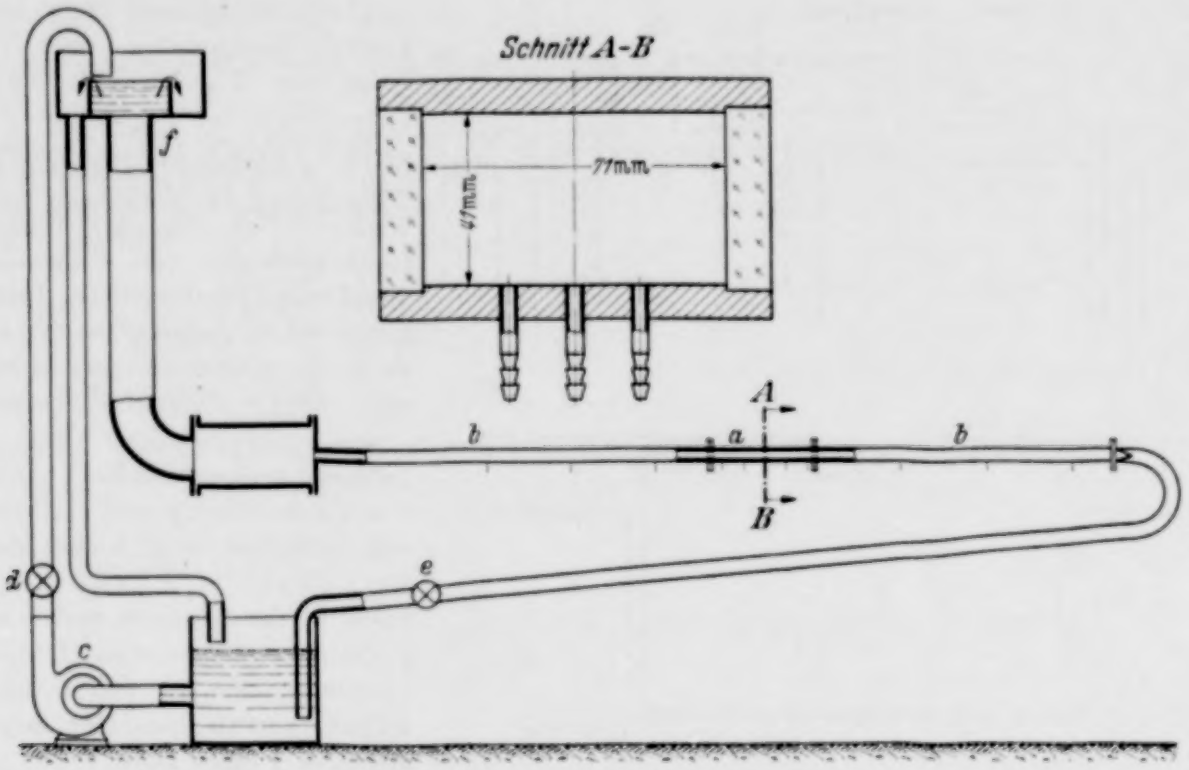


Abb. 1. Übersicht über die Versuchsanordnung. *a* Meßstrecke; *b* Zu- und Abführungsrohr; *c* Kreiselpumpe; *d*, *e* Drosselventile; *f* Überlauf.

beider Öffnungen dieselbe ist. Dies ist eine notwendige Maßnahme zur Prüfung der Sauberkeit der Bohrung. Allerdings wäre hier zu beachten, daß auch bei genau gleicher Größe der mittleren und der seitlichen Öffnung unter Umständen ein Druckunterschied zwischen beiden dadurch entstehen kann, daß in dem seitlichen Loch die Wandschubspannung etwas kleiner ist als im mittleren. Die Unterschiede sind jedoch in allen Fällen so klein, daß Druckgleichheit ein hinreichendes Kriterium für die Sauberkeit der Bohrung ist. Das Vergleichsloch mißt 0,1 cm im Durchmesser *d* und auch 0,1 cm in der Tiefe *l*. Das Versuchsloch im ersten Querschnitt (stromauf) hat 0,2 cm Durchmesser, die folgenden Versuchslöcher 0,4, 0,6, 0,8 und 1,0 cm Durchmesser. Die Tiefe ist jeweils gleich dem Durchmesser. Messungen mit 0,3, 0,5, 0,7 und 0,9 cm weiten Löchern konnten so durchgeführt werden, daß in die 0,4, 0,6, 0,8 und 1,0 cm weiten Löcher Metalleinsätze von je um 0,1 cm kleinerem Durchmesser eingepaßt wurden, die mit der Rohrwandung ohne jegliche Gratbildung glatt abschlossen. Die Lochtiefe konnte durch einen weiteren Einsatz verändert werden.

Zur Form der Versuchslöcher sei folgendes bemerkt: Im allgemeinen wird bei Druckmessungen die Wandanbohrung die in Abb. 2b gezeigte Form haben, d. h. an eine verhältnismäßig enge Wandanbohrung wird sich in Richtung zum Manometer ein Rohr anschließen, dessen Durchmesser größer ist als der Bohrungsdurchmesser. Im Gegensatz hierzu wurde bei den vorliegenden Versuchen aus Gründen des einfacheren Einbaues in die Versuchsanlage eine Anordnung gemäß Abb. 2a benutzt. In einem Kontrollversuch mit einer Bohrung gemäß Abb. 2b wurde jedoch festgestellt, daß, abgesehen von sehr kleinem l/d, die beiden Anordnungen gleichen Fehler liefern und daß auch der Gang des Fehlers mit l/d derselbe bleibt. Für $l/d = 1$ ergab sich völlige Über-

einstimmung zwischen beiden Anordnungen, so daß unsere Ergebnisse für die Praxis, wo meistens Anordnung 2b verwirklicht sein wird, voll brauchbar bleiben, solange l/d nicht zu klein wird.

Für sehr flache Bohrungen ($l/d \to 0$) wurden nur wenige Messungen gemacht. Im wesentlichen wurden diese Messungen in der Hoffnung angestellt, daß für $l/d \to 0$ der bei unseren Messungen immer festgestellte Überdruckeffekt ($\Delta p > 0$) in einen Saugeffekt übergeht, wenigstens für die Anordnung 2b. Aber auch bei dieser Anordnung und bei Verwendung von Zuckerlösung wurden selbst bei kleinen Verhältnissen l/d immer positive Druckfehler gefunden. Für Anordnung 2a stieg der Fehler auch bei noch verhältnismäßig kleinem l/d mit absinkendem l/d. Für extrem kleine l/d ist allerdings zu erwarten, daß der Fehler in Anordnung 2a wieder zurückgeht; wieweit, hängt von dem Durchmesser d' der Zuleitung ab.

Nach diesem Ergebnis schien es sehr merkwürdig, daß von *Fuhrmann* negative Fehler gemessen worden waren. Um in dieser Hinsicht eine Klärung zu bringen, wurde noch ein Versuchsloch gemäß Abb. 2c angefertigt mit extrem kleiner Tiefe und sehr breiter Vorkammer. Bei Verwendung von Wasser und hohen Geschwindigkeiten ergab sich das Folgende: Für $d = 1{,}2$ cm, $l = 0{,}07$ cm und für $d = 0{,}8$ cm, $l = 0{,}07$ cm wird der Fehler negativ und es tritt tatsächlich der von *Fuhrmann* beobachtete Saugeffekt ein. Der Effekt konnte nicht genau gemessen werden, da die Verhältnisse starken instationären Schwankungen unterworfen waren. Für dieselben Versuchsöffnungen ergaben sich bei Verwendung von Zuckerlösung und kleineren Geschwindigkeiten, d. h. bei kleineren *Reynolds*zahlen, positive Fehler. Diese Beobachtungen stehen einigermaßen mit denen von *Herrmann* in Einklang, der ja, wie eingangs erwähnt, sowohl positive als auch negative Fehler fand.

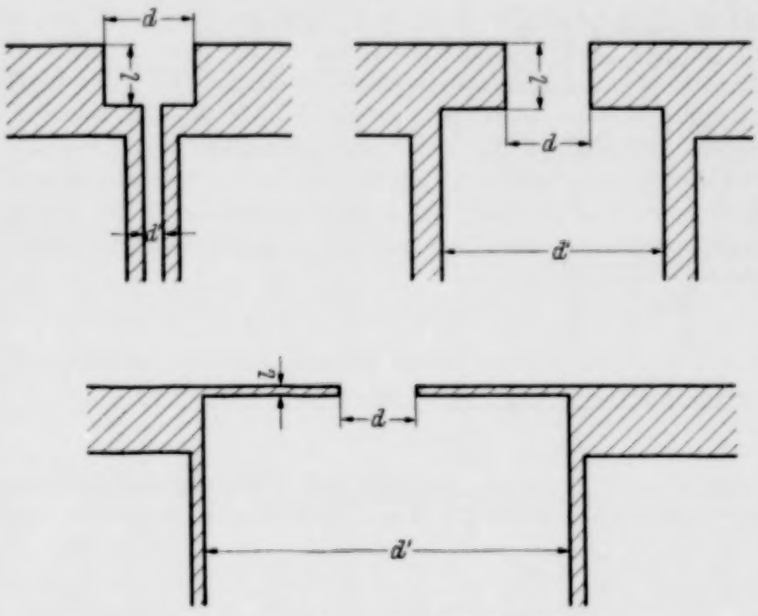


Abb. 2. Form der untersuchten Druckanbohrungen.

Über die ganze Länge des Rohres a sind im Abstand von 50 cm sechs Bohrungen von 0,2 cm Durchmesser verteilt, die mit einem Vielfachmanometer verbunden sind, um den für die Berechnung der Wandschubspannung maßgebenden Druckabfall in der Rohrleitung festzustellen. 60 cm vor dem Ende der Versuchsstrecke ist ein Staurohr in vertikaler Richtung verschiebbar in die Strömung eingebracht, um das Geschwindigkeitsprofil und die maximale Geschwindigkeit zu bestimmen.

Die Versuche wurden mit Zuckerlösung durchgeführt, deren Konzentration zur Änderung der kinematischen Zähigkeit in den Grenzen 1 cm²/s bis 0,3 cm²/s variiert wurde. Diese große Zähigkeit wurde verwandt, um trotz großer, gut definierter Bohrungen und für die Druckwirkung zureichender Geschwindigkeiten doch hinreichend kleine *Re*-Zahlen zu erhalten. Da sich die Zähigkeit mit der Temperatur stark ändert, mußte bei jedem Versuch die Temperatur der Flüssigkeit gemessen werden. Die Zähigkeit konnte dann einer Zähigkeits-Temperaturkurve entnommen werden, die vorher mit einem Kapillar-Viskosimeter für die betreffende Konzentration der Zuckerlösung aufgenommen werden mußte.

4. Bestimmung der Wandschubspannung. Zweck der in dieser Arbeit mitgeteilten Versuche ist die Ermittlung der durch (5) definierten Funktion $F(Re)$. Hierzu muß die Größe dV/dy unmittelbar an der Wand bekannt sein. Diese Größe ist mit der Wandschubspannung τ durch

$$\tau = \eta \frac{dV}{dy} \qquad (\text{mit} \quad \eta = \nu \varrho) \tag{7}$$

verknüpft. Im Zusammenhang mit (7) sei hier angemerkt, daß diese Beziehung zwischen Wandschubspannung τ und dV/dy sowohl bei laminarer als auch turbulenter Strömung gültig ist, da auch in einer turbulenten Grenzschicht in unmittelbarer Wandnähe die molekulare Zähigkeit die

scheinbare turbulente Zähigkeit überwiegt („laminare Unterschicht"). Direkt an der Wand spielt die turbulente Reibung überhaupt keine Rolle mehr. Weiter folgt aus den Versuchen, daß unter Benutzung von (8) [bzw. von (12)] die Ergebnisse sich sowohl für laminare als auch turbulente Strömung in einer einzigen Funktion $F(Re)$ der nach (4) gebildeten Re-Zahl darstellen lassen. Dies deutet darauf hin, daß in dem untersuchten Re-Zahlbereich für den Fehler Vorgänge maßgebend sind, die sich in der laminaren Unterschicht abspielen. Näheres hierzu wird in Ziff. 8 mitgeteilt werden.

Die Wandschubspannung τ wurde aus dem Druckabfall in Rohrlängsrichtung bestimmt. Hierzu betrachten wir ein Stück des rechteckigen Rohres von der Länge L (Abb. 3). p_1 und p_2 seien die auf Vorder- und Endfläche des Rohrstückes wirkenden Drücke. τ_m sei der Mittelwert der Wandschubspannung über den Rohrumfang. Das Gleichgewicht der in dem herausgegriffenen Rohrstück enthaltenen Flüssigkeiten ergibt

$$\tau_m L\, U = (p_1 - p_2)\, A\,,$$

wobei A die Querschnittsfläche und U der Umfang des Rohres ist.

Bei turbulenter Strömung dürfte die Schubspannung in Versuchs- und Vergleichsloch recht gut mit τ_m übereinstimmen. Daher erhält man hier

$$\frac{dV}{dy} = \frac{\tau_m}{\eta} = \frac{g}{\nu}\left(\frac{H_2}{L}\right)\frac{A}{U}\,, \tag{8}$$

wobei

$$p_1 - p_2 = \varrho\, g\, H_2 \tag{9}$$

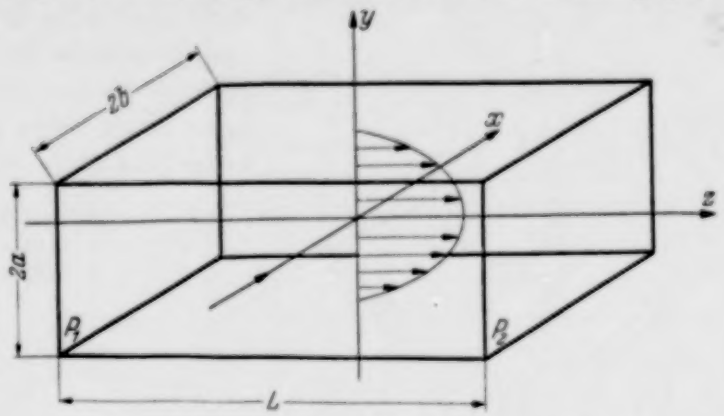


Abb. 3. Ausschnitt aus dem Versuchskanal.

gesetzt wurde. Die in (4) definierte Re-Zahl lautet mit der Abkürzung $V_1 = d\,\frac{dV}{dy}$

$$Re = \frac{dV_1}{\nu}\,.$$

Aus Formel (5) folgt dann

$$F = \frac{2\,\Delta p}{\varrho\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 d^2} = \frac{2\,\varrho\, g\, H_1}{\varrho\, V_1^2} = 2\,g\,\frac{H_1}{V_1^2}\,, \tag{10}$$

wobei

$$\Delta p = \varrho\, g\, H_1 \tag{11}$$

ist. Diese Formeln wurden zur Auswertung bei turbulenter Strömung im Rohr benutzt. Bei laminarer Strömung ist dagegen die Annahme, daß die Wandschubspannung am Versuchs- bzw. Vergleichsloch mit der mittleren Wandschubspannung τ_m übereinstimmt, u. U. keine gute Näherung mehr. Daher wurde aus der bekannten Lösung für die laminare Durchströmung eines rechteckigen Rohres (sie entspricht der Lösung des Torsionsproblems für einen zylindrischen Stab von rechteckigem Querschnitt) dV/dy an der Stelle des Versuchs- bzw. Vergleichsloches (also $y = -a$ und $x = \pm 1$, vgl. Abb. 3) in Abhängigkeit vom Druckabfall berechnet. Die Rechnung kann hier übergangen werden; das Ergebnis ist

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)_{\substack{y=-a\\ x=\pm 1}} = \frac{g}{\nu}\,\frac{H_2}{L}\,a\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^2}\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\nu+1}{2a}\,\pi}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\nu+1}{2a}\,\pi\,b}\right) \tag{12}$$

Gleichung (12) tritt bei laminarer Strömung an die Stelle von (8).

Hier werde noch auf folgenden Umstand hingewiesen: Bei den Messungen war die Strömung im allgemeinen turbulent. Man kann dies an der scheinbar erhöhten Zähigkeit erkennen, die sich aus Druckabfall und Maximalgeschwindigkeit bei Annahme laminarer Geschwindigkeitsverteilung ergibt. Nur in einigen Fällen war die Strömung laminar. Oft war die Strömung aber auch in dem Übergangsbereich, wo eine einwandfreie Entscheidung ob laminar oder turbulent nicht leicht ist. In solchen Fällen wurde immer mit (12) gerechnet. Unter Umständen entstehen dadurch Fehler und $F(Re)$ ergibt sich etwas größer als es in Wirklichkeit ist. In der später benutzten Auftragung von $\log F(Re)$ über $\log Re$ können diese Fehler schlimmstenfalls etwa 10% betragen. Andererseits streuen aber auch die Messungen erheblich, so daß allzu große Sorgfalt zur Beseitigung dieser Unsicherheit unangebracht war.

5. Druckmessung. Zur Ermittlung des Fehlers in der Druckanzeige der Versuchsbohrungen, d. h. zur Bestimmung der in Ziff. 2 eingeführten Funktion $F(Re)$, mußten die Druckdifferenzen zwischen Versuchs- und Vergleichsloch gemessen werden. Naturgemäß sind diese Differenzen recht klein (bei unseren Versuchen sind sie von der Größenordnung weniger zehntel Millimeter Wassersäule) und es mußte ein verhältnismäßig empfindliches Druckmeßgerät benutzt werden. Als solches stand ein Hebelmikromanometer des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung zur Verfügung. Dieses Instrument hat einen Meßbereich von etwa 1/100 bis 2,5 mm WS; es bietet den Vorteil, daß zur Erreichung eines bestimmten Ausschlages nur ein kleines Luftvolumen nachströmen muß. Da das Instrument mit Alkoholfüllung arbeitet und nur für die Messung von Drücken in Luft geeignet ist, mußte die Differenz zwischen Versuchs- und Vergleichsloch über ein Luftpolster auf das Instrument übertragen werden. Dies wurde dadurch erreicht, daß zwischen die mit Zuckerlösung gefüllte Meßstrecke und das Manometer zwei in Abb. 4 ersichtliche Glasröhren geschaltet wurden, die durch mehrere Hähne untereinander, mit der Außenluft und mit dem Manometer

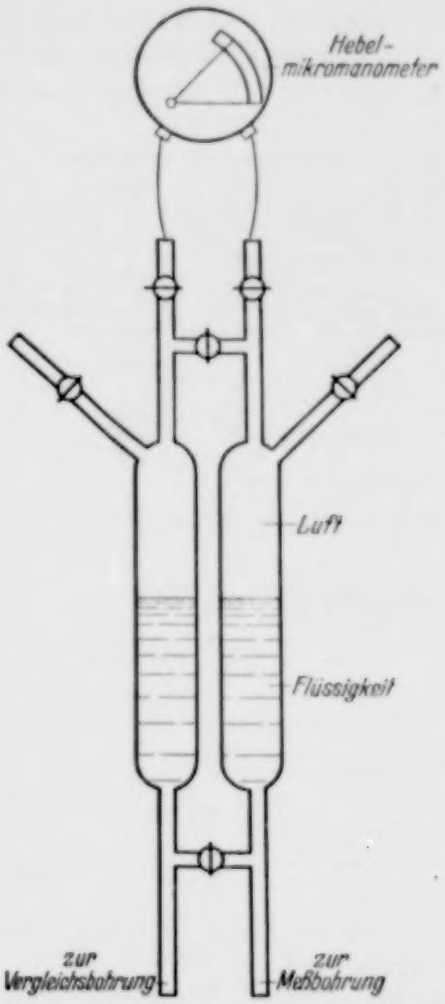


Abb. 4. Prinzipskizze zur Messung der Druckdifferenz zwischenVersuchs- und Vergleichsloch.

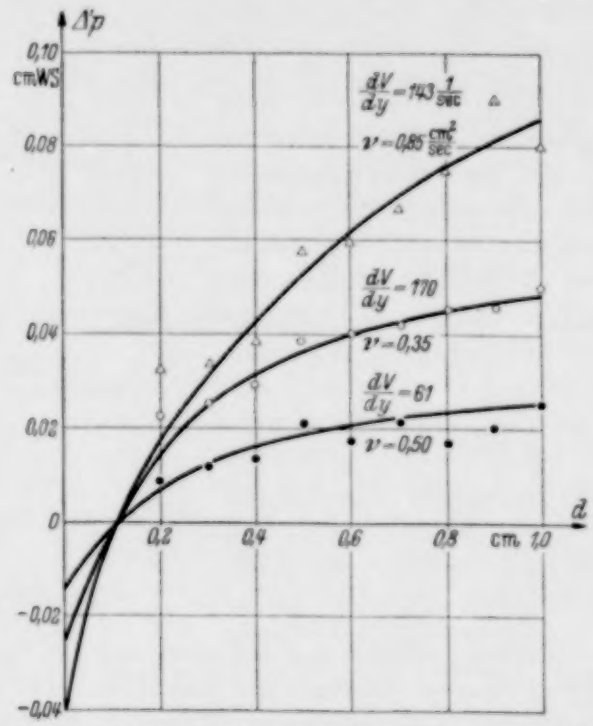


Abb. 5. Relativer Druckfehler $\Delta' p$ in Abhängigkeit von d für ein Vergleichsloch von 0,1 cm Durchmesser.

verbunden waren. Die Glasröhren waren in ihrem unteren Teil mit Zuckerlösung gefüllt. Die verschiedenen Hähne dienten zur Regulierung der Größe des Luftvolumens und der Einjustierung der Nullstellung des Manometers. Die Einstellzeit der ganzen Anordnung war recht hoch, in einigen Fällen bis zu 10 Minuten.

6. Korrekturformel. Es ist nicht möglich, den absoluten Druckfehler Δp einer bestimmten Bohrung direkt zu messen, sondern, wie oben erwähnt, muß man den relativen Fehler $\Delta' p$ gegenüber einem Vergleichsloch messen. Man hat daher nachträglich aus dieser Messung den absoluten Fehler Δp durch ein graphisches oder rechnerisches Verfahren zu bestimmen.

Das nächstliegende ist ein graphisches Verfahren: Für konstante Zähigkeit ν und konstantes dV/dy mißt man $\Delta' p$ in Abhängigkeit von d, wobei vorausgesetzt ist, daß l/d konstant gehalten wird. Für $d = d_0 =$ Durchmesser des Vergleichsloches erhält man $\Delta' p = 0$. Die so gewonnene Kurve wird dann auf $d = 0$ extrapoliert und die ganze Kurve soweit nach oben verschoben, bis der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse in den Nullpunkt fällt. Dann hat man den absoluten Fehler Δp in Abhängigkeit von d. In Abb. 5 sind solche Messungen wiedergegeben. Der Nachteil des Verfahrens liegt darin, daß im allgemeinen weder ν noch dV/dy genau konstant gehalten werden können. Daher streuen die Meßpunkte und man muß entweder eine Ausgleichskurve durchlegen und diese als für einen Mittelwert von ν bzw. dV/dy gültig ansehen, oder aber man muß aus verschiedenen Messungen auf ein bestimmtes Wertepaar ν und dV/dy rechnerisch interpolieren.

Daher wurde ein anderes Korrekturverfahren benutzt, das im wesentlichen darauf beruht, daß auf Grund der Versuchsergebnisse in weitem *Re*-Zahlbereich die Funktion $F(Re)$ in der Form

$$F(Re) \sim Re^{-\mu} \quad \text{mit} \quad \mu = \text{konst.} \tag{13}$$

geschrieben werden kann. Da Versuchs- und Vergleichsloch im gleichen Querschnitt jeweils 1 cm von der Rohrmittellinie entfernt liegen, ist für sie sowohl ν als auch dV/dy gleich. Der Durchmesser des Vergleichsloches sei d_0, der des Versuchsloches d. Dann ist nach (4) und (5):

$$\Delta p_0 = c\, d_0^{2(1-\mu)},$$
$$\Delta p = c\, d^{2(1-\mu)},$$

wobei die Konstante c von ν und dV/dy abhängt und in beiden Fällen dieselbe ist. Folglich wird

$$\Delta' p = \Delta p - \Delta p_0 = \Delta p \left[1 - \left(\frac{d_0}{d}\right)^{2(1-\mu)}\right]$$

und

$$\Delta p = k\, \Delta' p\,, \tag{14}$$

wobei der Korrekturfaktor

$$k = \frac{1}{1 - \left(\frac{d_0}{d}\right)^{2(1-\mu)}} \tag{15}$$

ist. Die Meßergebnisse werden nun am besten in der Form $F(Re)$ über Re bzw. log F über log Re aufgetragen. Hierbei ist $F(Re)$ definitionsgemäß zufolge (5)

$$F = \frac{\Delta p}{\frac{\varrho}{2} d^2 \left(\frac{dv}{dy}\right)^2} = k\, \frac{\Delta' p}{\frac{\varrho}{2} d^2 \left(\frac{dv}{dy}\right)^2},$$

$$F(Re) = k\, F'(Re)\,, \tag{16}$$

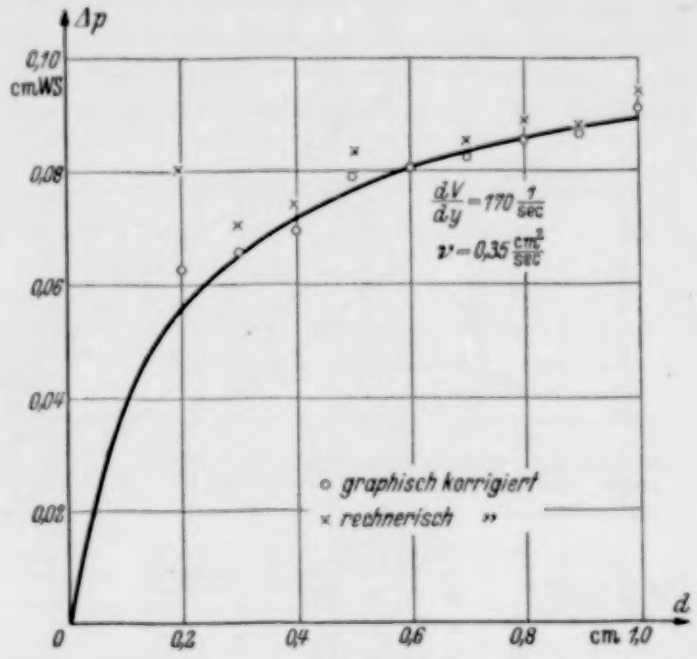


Abb. 6. Vergleich der graphischen mit der rechnerischen Korrektur

wobei F' die mit dem relativen Fehler $\Delta' p$ (an Stelle des absoluten Fehlers Δp) gebildete Funktion der *Reynolds*zahl Re ist. In der Abb. 7 ist für 3 Versuchsbohrungen log F (Re) über log Re aufgetragen. Da $F'(Re)$ proportional $Re^{-\mu}$ ist, ergeben sich gerade Linien mit der Neigung $-\mu$. Mit dem aus der Neigung der Geraden gefundenen Wert von μ ergibt sich nach (15) auch der Faktor k. Bei Verschiebung dieser Geraden um den jeweiligen Betrag log k in Ordinatenrichtung fallen sie in eine einzige Gerade zusammen. Diese Gerade ist das Bild von log $F(Re)$ über log Re. In Abb. 7 wurde allerdings jeder einzelne Meßpunkt verschoben, um zu zeigen in welchem Bereich die Ergebnisse streuen; außerdem sind bei $F(Re)$ auch noch die Ergebnisse von anderen Versuchsbohrungen berücksichtigt.

An mehreren Beispielen wurde nachgeprüft, ob dieses rechnerische Korrekturverfahren zum gleichen Ergebnis führt wie das oben beschriebene Verfahren der graphischen Extrapolation. Abb. 6 zeigt ein Beispiel. Man ersieht aus den durchschnittlich einseitigen Abweichungen der Ergebnisse, daß der beim graphischen Verfahren nur schwer bestimmbare Nullpunkt nicht ganz richtig angenommen war. Die verbleibenden, wechselnden Unterschiede sind darauf zurückzuführen, daß, wie schon erwähnt, ν und dV/dy jeweils für eine Kurve nicht hinreichend konstant waren.

Wie oben schon einmal erwähnt worden war, wurden auch Versuche angestellt, den Einfluß von l/d auf den Fehler zu ermitteln. Während die Versuchsreihen zur Bestimmung von $F(Re)$ mit dem Verhältnis $l/d = 1$ gemacht wurden, ist in späteren Versuchsreihen l/d systematisch geändert worden. An sich müßte dann auch l/d_0 für das Vergleichsloch in gleicher Weise verändert werden, doch wurde dies unterlassen. Es stellte sich nämlich heraus, daß der hierdurch entstehende Fehler durchaus nicht die Meßfehler überschreitet, so daß sich eine solche Änderung des Vergleichsloches nicht lohnte.

7. Meßergebnisse. Das Ergebnis der Messungen an den Versuchsbohrungen $l/d = 1$ (Vergleichsbohrung: $l = 0{,}1$ cm, $d = 0{,}1$ cm) ist in Abb. 7 enthalten. Wie oben schon erwähnt, sind

in Abb. 7 für 3 Versuchsbohrungen die Geraden log F_0 über log Re aufgetragen (gestrichelt). Es ergab sich bei dieser Art der Auftragung, daß sich die Meßpunkte für alle hier untersuchten Werte von Re durch Ausgleichsgeraden verbinden lassen. Die Neigung dieser Geraden entspricht hierbei dem Wert $\mu = -3/4$. Weiterhin sind für alle untersuchten Bohrungen die Geraden log $F(Re)$ über log Re (ausgezogen) aufgetragen. Die gestrichelten Geraden gehen in die ausgezogene Gerade bei Verschiebung um log k in Ordinatenrichtung über [k nach (15)].

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß Abb. 7 auch Meßpunkte enthält, die in einem flacheren Kanal als dem in Abb. 1 gezeigten Versuchskanal gemessen wurden. Es sollte hierbei versucht werden, ob bei dünnerer Grenzschicht die Gesetzmäßigkeit für den Fehler sich ändert und sich etwa der Form nach (1) nähert. Eine solcher Effekt konnte aber nicht festgestellt wer-

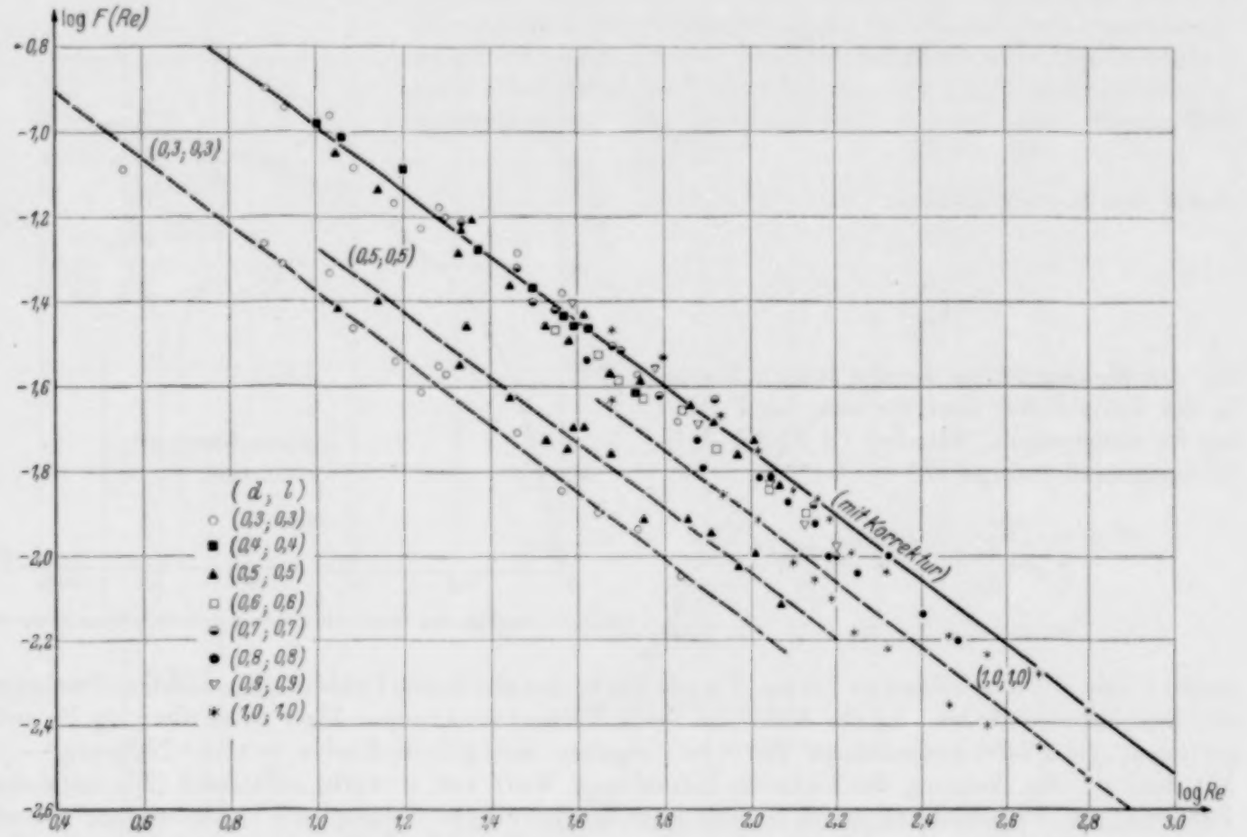


Abb. 7. $F(Re)$ über log Re. Die Messungen an dem Versuchsloch $d = 0{,}2$ cm liegen im allgemeinen etwas zu hoch (vgl. Ziff. 10) und wurden in der Auftragung nicht berücksichtigt. Zum Vergleich sind außerdem die Geraden log F' über log Re für 3 Versuchsbohrungen eingetragen.

den, da die Kanalbreite und damit die „Grenzschichtdicke" (die bei unseren Versuchen etwa der halben Kanalbreite entspricht) immer noch zu groß war. Das Ergebnis in Abb. 7 läßt sich analytisch darstellen durch

$$\log F(Re) = -0{,}24 - \frac{3}{4} \log Re \tag{17}$$

oder

$$F(Re) = 0{,}58 \cdot Re^{-3/4}. \tag{18}$$

Dieser Ausdruck darf in dem gemessenen Re-Zahlbereich $0{,}5 \leq \log Re \leq 3{,}0$, d. h. $3 \leq Re \leq 1000$ als gültig angenommen werden. Vorausgesetzt ist $l/d = 1$ und ein Versuchsloch gemäß Abb. 2a, doch wurde schon darauf hingewiesen, daß die Formel für $l/d = 1$ auch für Druckanbohrungen gemäß Abb. 2b gültig bleibt. Für andere Verhältnisse l/d läßt sich die Funktion $F(Re)$ in der Form

$$F(Re) = C \cdot Re^{-3/4} \tag{19}$$

schreiben. Der Faktor C ist hierbei eine Funktion von l/d. In mehreren Versuchsreihen wurde der Einfluß von l/d auf C ermittelt. Das Ergebnis ist in Abb. 8 dargestellt.

In Verbindung mit der Definition (4), den Gleichungen (5) und (7) gestattet die Formel (19), den Fehler vorauszuberechnen, den eine statische Druckanbohrung vom Durchmesser d gegenüber einer „idealen" Bohrung von verschwindend kleinem Durchmesser anzeigt.

Unter Benutzung von (4), (7), (18) läßt sich (5) auch in folgender Form schreiben:

$$\Delta p = 0{,}29\, d^{1/2}\, \tau^{5/4}\, \eta^{-1/2}\, \varrho^{1/4}\,.$$

Über die Fehlergrenze läßt sich etwa folgendes sagen: Durch (17) dürfte in Anbetracht der normalen Streuung der Meßwerte sowie der schon früher erwähnten Unsicherheit, ob zur Auswertung Formel (8) oder (12) benutzt werden soll, der Zusammenhang zwischen log F und log Re etwa auf $\pm$ 10% gegeben sein.

8. Strömungsphotographie. Als Abschluß der Untersuchungen wurde die Strömung im Versuchsloch photographiert. Hierzu wurde nicht der Versuchskanal selbst benutzt, da einmal die zur Verfügung stehenden Abmessungen dort etwas klein waren und das Versuchsloch ziemlich unzugänglich war und zum anderen die als Versuchsflüssigkeit benutzte Zuckerlösung nach kurzer Benutzungszeit so dunkel wurde, daß Photographieren unmöglich war. Die Beobachtungen wurden vielmehr in dem Wasserkanal des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung gemacht. In die Meßstrecke dieses Kanals wurde eine ebene Platte mit zugeschärfter Vorderkante eingebaut. Aus dieser Platte ist eine kreisrunde Öffnung ausgeschnitten, an die sich nach unten ein zylindrischer Topf aus Glas anschließt. Der Topf ist unten verschlossen, doch kann seine Tiefe durch Verschieben des Verschlußstückes variiert werden; Abb. 9. Diese Anordnung entspricht dem Versuchsloch bei der statischen Druckmessung.

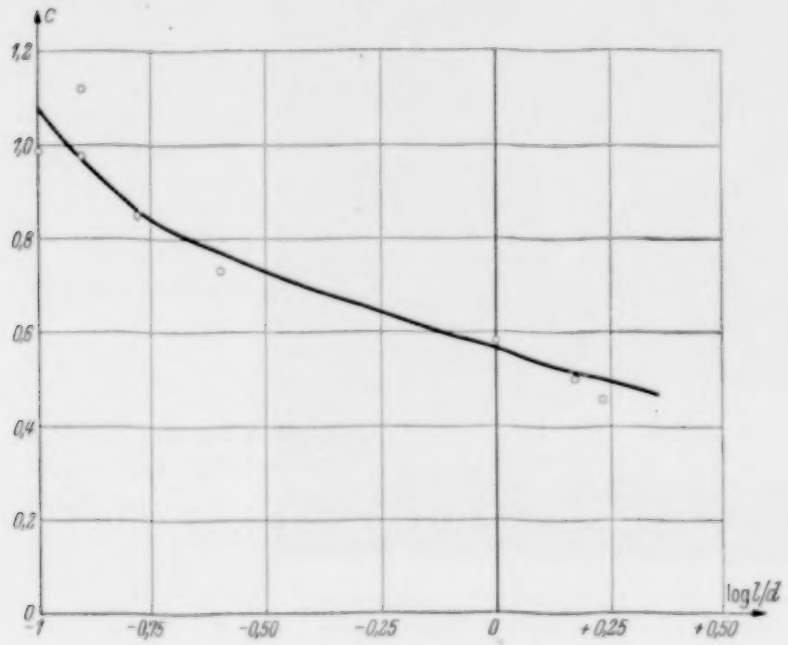


Abb. 8. Verlauf des Faktors C in Gl. (19) mit l/d.

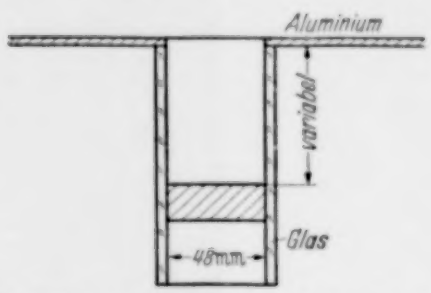


Abb. 9. Form des runden Versuchsloches, wie es für die photographische Beobachtung benutzt wurde.

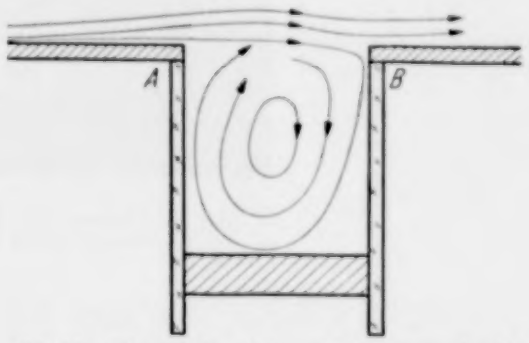


Abb. 10. Schematische Skizze der Strömung im Versuchsloch. Das Einströmen bei B und das Ausströmen bei A hat man sich in verschiedenen Ebenen vorgehend zu denken.

Die erste Versuchsreihe mit dieser Anordnung sollte die Verformung einer wandnahen Stromlinie sichtbar machen und gleichzeitig die Entfernung von der Wand, bis auf die sich der Einfluß der Öffnung bemerkbar macht, größenordnungsmäßig festlegen. Um Rückschlüsse auf die Verhältnisse in unserem eigentlichen Versuchsrohr ziehen zu können, müßten eigentlich die gemäß (4) gebildeten *Re*-Zahlen in beiden Fällen gleich groß sein. Um nicht auf zu kleine Strömungsgeschwindigkeiten bei den jetzigen Versuchen zu kommen, konnte diese Bedingung nur angenähert erfüllt werden. Die *Reynolds*zahlen im Wasserkanal waren durchschnittlich 5 bis 10mal größer als die größten *Re*-Zahlen in dem mit Zuckerlösung betriebenen Versuchskanal. Hiervon ist jedoch keine große Änderung im Strömungsbild in beiden Fällen zu erwarten.

Die Stromlinien konnten durch Einführung eines Farbfadens sichtbar gemacht werden. An der Form des Farbfadens war klar zu ersehen, daß die Bewegung laminar war. Die Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht an der Wand wurde an der Bewegung eines im Wasser suspendierten Teilchens gemessen. Sie betrug 5 cm/sec. In Abb. 10 ist schematisch gezeichnet, wie der Stromlinienverlauf mit bloßem Auge und auf der Photographie zu beobachten war. Nach den

Beobachtungen scheint es so zu sein, daß die Flüssigkeit vorzugsweise in dem Mittelteil des Loches einströmt (entspricht den in Abb. 10 skizzierten Stromlinien) und an den Seitenwänden („seitlich" in bezug auf die Strömungsrichtung) wieder ausströmt. Aber auch eine zeitliche Instationärität des Vorganges ist nicht ganz ausgeschlossen. Aus den Bildern und der visuellen Beobachtung war deutlich zu erkennen, daß nur die Stromlinie unmittelbar an der Wand merklich verformt wird. Durch visuelle Beobachtung konnte weiterhin festgestellt werden, daß auf Stromlinien, die wenige mm von der Wand entfernt waren, schon gar kein Einfluß mehr von der Wandöffnung merkbar ist. Damit steht fest, daß die Störung nur in der unmittelbarsten Umgebung der Öffnung bis auf Entfernungen von höchstens $1/10\,d$ (bei unseren Verhältnissen) von Einfluß ist.

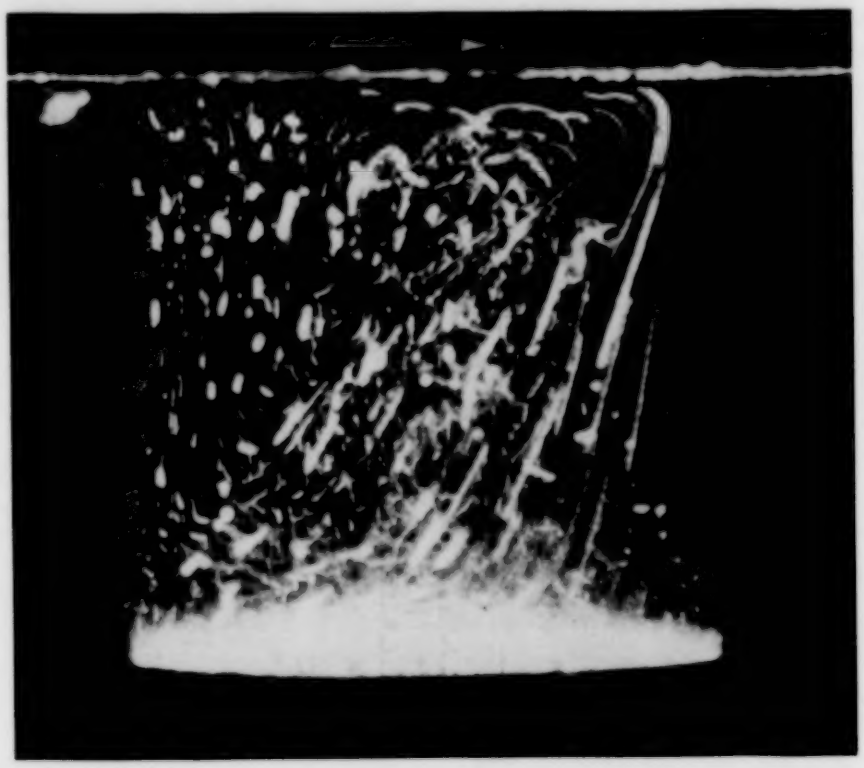


Abb. 11. Photographie der Strömung im Versuchsloch (Tröpfchenmethode). Belichtungszeit: 2 sec; Anströmgeschwindigkeit 8 cm/sec; vergrößert: 3 : 2.

Dieses Ergebnis findet seine Bestätigung in einer erneuten Betrachtung von (5). Diese Gleichung läßt sich nämlich in der folgenden Form schreiben:

$$\Delta p = \frac{1}{2}\varrho\left(d_e\frac{dV}{dy}\right)^2,$$

wobei die Länge d_e die folgende Bedeutung hat:

$$d_e = \sqrt{F(Re)}\,d\,. \tag{20}$$

Diese Länge d_e muß physikalisch offenbar als die schon öfter erwähnte Entfernung gedeutet werden, auf die sich Störungen von der Wandöffnung her noch bemerkbar machen. Weiter unten wird gezeigt werden, daß in unserem Fall $F(Re) \approx 1/1600$ war und daher $d_e \approx d/40 \approx 1$ mm. Die Durchmusterung der in Ziff. 7 mitgeteilten Versuchsergebnisse mit Zuckerlösung ergab, daß für alle vorkommenden Re-Zahlen und alle untersuchten Durchmesser d_e nie wesentlich größer als 1 mm war. Hiernach dürfte klar sein, daß auch bei turbulenter Strömung im Versuchsrohr der für den Fehler wesentliche Vorgang sich in dem vorwiegend laminaren, wandnahen Teil der Grenzschicht abspielt, so daß bei den Ergebnissen kein Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Rohrströmung zu erkennen ist.

In einer zweiten Versuchsreihe wurde die Strömung mit kugelförmigen Tröpfchen sichtbar gemacht, die auf folgende Weise hergestellt wurden: Nitrozellulose wird in Amylacetat gelöst und anschließend durch Zusatz von Tetrachlorkohlenstoff das spezifische Gewicht 1 eingestellt. Die so entstandene milchfarbene, wasserunlösliche Flüssigkeit wird mit einer Injektionsspritze tröpfchenförmig in den Zylinder-Innenraum eingeführt. Nach einiger Zeit wird dann photographiert. Bei Wahl einer nicht zu kurzen Belichtungszeit bilden sich die Tröpfchen als Striche

auf dem Bild ab, deren Länge, dividiert durch die Belichtungszeit, direkt die Geschwindigkeit an dem betreffenden Ort gibt. Abb. 11 ist ein Beispiel dafür. Man erkennt deutlich, daß der Strömungsverlauf in dem Zylinder etwa so ist, wie er in Abb. 10 schematisiert dargestellt wird. Die außen vorbeiströmende Flüssigkeit versetzt durch die übertragenen Schubspannungen die Flüssigkeit im Innern in rotierende Bewegung, wobei allerdings nach Abb. 10 klar ist, daß an der Stelle B (Abb. 10) ständig neues Flüssigkeitsmaterial von außen zufließt, das am seitlichen Rand der Bohrung wieder nach außen abfließen muß. Die Geschwindigkeiten in verschiedenen Punkten innerhalb des Zylinders liegen bei den in Abb. 11 dargestellten Verhältnissen zwischen den Grenzen von etwa 0,1 cm/sec und 0,5 cm/sec. Dies ist aber auch die Größenordnung der charakteristischen Geschwindigkeit $V_c = d_c\, dV/dy$, die für den Fehler der Druckmessung verantwortlich ist. Nach (20) wird nämlich

$$V_c = \sqrt{F(Re)}\; d\, \frac{dV}{dy} = \sqrt{F(Re)}\; V_1 .$$

Schätzt man dV/dy für unseren Fall aus den bekannten Formeln für die laminare Grenzschicht an einer ebenen Platte ab und setzt den so erhaltenen Wert in (4) ein, so ergibt sich die *Reynolds*zahl mit $d = 4{,}8$ cm zu

$$Re = \frac{d^2}{\nu}\,\frac{dV}{dy} \approx 10^4 .$$

Wenn man die in Ziff. 7 mitgeteilten Versuchsergebnisse auf so hohe *Reynolds*zahlen extrapolieren darf, so ist zu erwarten:

$$F(Re) \approx \frac{1}{1600} .$$

Hiermit und mit dem abgeschätzten Wert von $\frac{dV}{dy}$ wird

$$V_c \approx \frac{1}{8}\ \text{cm/sec} ,$$

d. h. V_c ist tatsächlich von der Größenordnung der in dem Loch beobachteten Geschwindigkeiten und es leuchtet ein, daß die Fehlanzeige gemäß (5) einfach der mit V_c gebildete Staudruck ist:

$$P = \frac{\varrho}{2}\, V_c^2 .$$

(Eingegangen am 29. Oktober 1955.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Ajit Kumar Ray*, 43 C Suburban School Road, Calcutta 25, Indien.

Optimale Auslegung von Salomon-Schwingungstilgern

Von P. R. Paslay und A. Slibar

1. Einleitung. Im Verbrennungsmotorenbau werden häufig in der Kurbelwelle gelagerte Rollkörper zur Tilgung der erzwungenen Drehschwingungen und Erzielung gleichmäßigen Laufes verwendet. Diese Art einer Anordnung heißt Salomon-Schwingungstilger und hat gegenüber dem Pendelschwingungstilger gewöhnlicher Bauart den Vorteil geringeren Raumbedarfes. Eine solche Vorrichtung ist in Abb. 1 schematisch dargestellt.

Die linearisierte Behandlung des Salomon-Tilgers wurde von *Stieglitz*[1] sowie *Zdanoch* und *Wilson*[2] durchgeführt. Weiter haben verschiedene Autoren das Verhalten des gewöhnlichen Pendel-Schwingungstilgers untersucht, indem sie diesen entweder als mathematisches[3] oder physikalisches[4] Pendel betrachteten. *Slibar* und *Desoyer*[5] haben gezeigt, daß beim Pendel-Schwingungstilger trotz Einhaltung der sogenannten ersten Abstimmbedingung bei ungünstiger Kombination der Parameter des Systems unerwünschte Resonanz auch im konstruktiv erreichbaren Gebiet auftreten kann.

Es wird häufig vorgeschlagen, die Behandlung des Salomon-Schwingungstilgers unter Zugrundelegung der Bewegungsgleichungen des gewöhnlichen Pendel-Schwingungstilgers, jedoch mit Benützung einer „Ersatzmasse", durchzuführen. Der Vergleich der Bewegungsgleichungen der beiden Anordnungen zeigt jedoch, daß dies keine befriedigende Lösung liefern kann, da bei der nichtlinearisierten Behandlung der beiden Anordnungen in den beiden Gleichungsgruppen charakteristische Terme mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten.

In der vorliegenden Arbeit wird die Lösung der nichtlinearisierten Bewegungsgleichungen des Salomon-Schwingungstilgers mit Hilfe des Iterationsverfahrens bestimmt. Es zeigt sich, daß durch Einhaltung einer „ersten Abstimmbedingung" die Amplitude des Gliedes erster Ordnung in einem dimensionslosen Parameter zum Verschwinden gebracht werden kann. Ferner zeigt die Rechnung, daß, entsprechend dem Verhalten des gewöhnlichen Pendel-Schwingungstilgers, kein absolutes Minimum der relativen Winkelgeschwindigkeitsschwankung als Funktion der Masse des Tilgungskörpers existiert. Die nichtlinearisierte Behandlung liefert eine weitere Beziehung zwischen den Parametern des Systems, welche zur Erzielung möglichsten Gleichlaufes für die Bestimmung der günstigsten Kombination der freien Parameter innerhalb der konstruktiven Grenzen verwendet werden kann.

2. Die Bewegungsgleichungen. Der Rechnung liegt eine Anordnung gemäß Abb. 1 zugrunde. Die Kurbelwelle besitze die Masse M_0, das Trägheitsmoment J_0 um die Drehachse und das Trägkeitsmoment J_S um die zur Drehachse parallele Schwerachse durch S. In dieser Schwungmasse sei der Tilgerkörper von der Masse m und dem Trägheitsmoment J_1 um seine Symmetrieachse, auf seiner Rollbahn vom Halbmesser $r + e$ gelagert. Der Mittelpunkt der kreiszylindrischen Rollbahn befinde sich im Abstand R von der Drehachse. Die Bedeutung der weiteren Bezeichnungen geht aus Abb. 1 hervor.

Auf die Schwungmasse wirkt ein äußeres Drehmoment

$$M = \overline{M} + \Delta M \cdot \sin \nu \omega_0 t , \tag{1}$$

von dem der konstante Betrag $\overline{M}$ zur Aufrechterhaltung der konstanten mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_0 der Anordnung gegen die Arbeitswiderstände abgespalten werde. Weiter be-

[1] *A. Stieglitz*, Beeinflussung von Drehschwingungen durch pendelnde Massen, Diss. Dresden, 1937.

[2] *R. W. Zdanoch* und *T. S. Wilson*, Proc. Inst. Mech. Eng., London, 143 (1940), S. 182.

[3] *E. S. Taylor*, J. Soc. autom. Engr. 38 (1936), S. 81; *O. Krämer*, Z. VDI 82 (1938), S. 1297, Z. VDI 83 (1939), S. 901; *W. Schick*, Ing.-Arch. 10 (1939), S. 303; *A. Kimmel* und *L. Lutzweiler*, Ing.-Arch 12 (1941), S. 100; *F. P. Porter*, The Centrifugal Pendulum Dynamic Damper, SAE-War Engr. Board, N. Y., 1945, S. 269; *F. R. E. Crossley*, J. Appl. Mech., Paper No. 52 APM 17, Paper No. 52 F 11; *K. Desoyer* und *A. Slibar*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 208.

[4] *F. Söchting*, Berechnung mechanischer Schwingungen, S. 261, Wien 1951; *A. Slibar* und *K. Desoyer*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 36; *A. Slibar* und *K. Desoyer*, Österr. Ing.-Arch. 7 (1953), S. 309.

[5] *A. Slibar* und *K. Desoyer*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 36.

trachten wir den Tilgerträger als unendlich steif, d. h. wir vernachlässigen die Eigendrehfrequenzen des Kurbelwellenkörpers[1].

In die *Lagrange*schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \tag{2}$$

führen wir als verallgemeinerte Koordinaten die beiden Winkel

$$q_1 = \varphi, \qquad q_2 = \vartheta$$

ein, welche bei Zugrundelegung der Bedingung reinen Rollens des Tilgerkörpers auf seiner Bahn die Lage des Systems in jedem Augenblick kennzeichnen.

Wir bestimmen die verallgemeinerten Kräfte Q_k durch Gleichsetzen der differentiellen Arbeiten

$$Q_\varphi \cdot d\varphi + Q_\vartheta \, d\vartheta = (\Delta M \sin \nu \varphi) \, d\varphi . \tag{3}$$

Es ergibt sich

$$Q_\varphi = \Delta M \sin \nu \varphi = \Delta M \sin \nu \omega_0 t, \qquad Q_\vartheta = 0. \tag{4}$$

Bei Vernachlässigung des Rollkörpergewichtes und von Reibungsgliedern wird unter der Annahme reinen Rollens die kinetische Energie T des gesamten Systems

$$T = \frac{1}{2} J_S \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M_0 l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_1 \left(\dot{\varphi} - \frac{e}{r}\dot{\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left[R^2 + 2 Re \cos \vartheta + e^2\right] \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m e^2 \dot{\vartheta}^2 + m e (R \cos \vartheta + e) \dot{\varphi} \dot{\vartheta} . \tag{5}$$

Durch Einsetzen von T und dessen Ableitungen sowie von Q_φ bzw. $Q_\vartheta = 0$ in (2) erhält man die beiden Bewegungsgleichungen des Salomon-Schwingungstilgers in der Form

$$\begin{aligned} &[J_S + M_0 l^2 + J_1 + m(R^2 + e^2 + 2 Re \cos \vartheta)] \ddot{\varphi} \\ &+ \left[m e (R \cos \vartheta + e) - \frac{e}{r} J_1\right] \ddot{\vartheta} \\ &- 2 m e R \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta} \dot{\varphi} - m e R \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}^2 \\ &= \Delta M \sin \nu \omega_0 t , \\ &\left[m e (R \cos \vartheta + e) - \frac{e}{r} J_1\right] \ddot{\varphi} + \left[\left(\frac{e}{r}\right)^2 J_1 + m e^2\right] \ddot{\vartheta} + m e R \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 = 0 . \end{aligned} \tag{6}$$

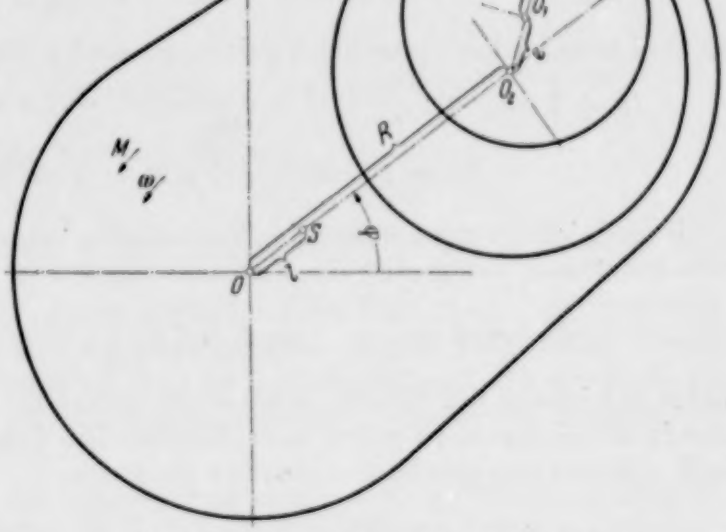


Abb. 1. Schema eines Salomon-Schwingungstilgers.

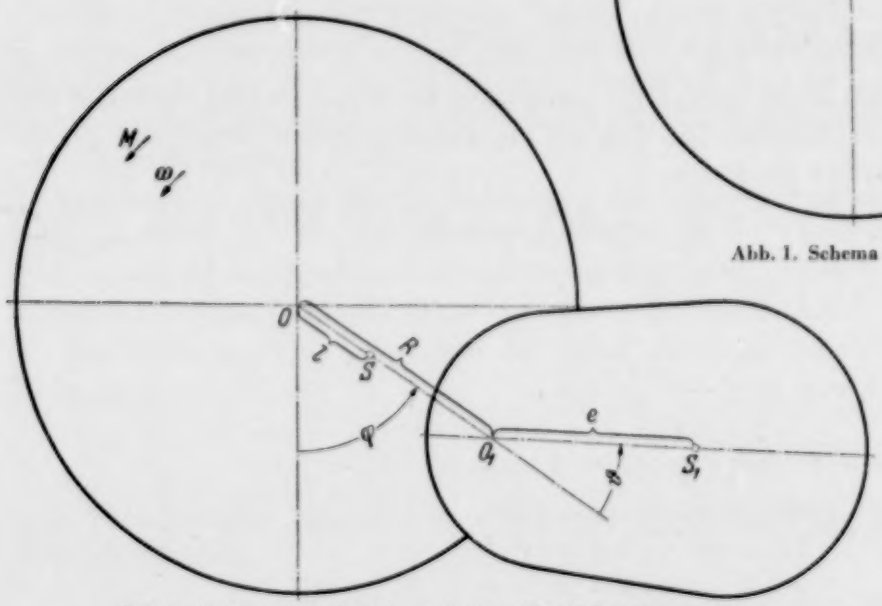


Abb. 2. Schema eines einfach angelenkten Pendel-Schwingungstilgers.

Schreiben wir bei Verwendung der aus Abb. 2 ersichtlichen Bezeichnungen zum Vergleich die von *Slibar* und *Desoyer*[2] für die Bewegung des gewöhnlichen Pendel-Schwingungstilgers gegebenen Beziehun-

[1] *R. Grammel, K. Klotter* und *K. v. Sanden*, Ing.-Arch. 7 (1936), S. 439.
[2] Siehe Fußnote 5, S. 182.

gen an, so lauten diese

$$\left.\begin{aligned}&[J_S + M_0 l^2 + J_1 + m\,(R^2 + e^2 + 2\,Re\cos\vartheta)]\,\ddot{\varphi} + [m\,e\,(R\cos\vartheta + e) + J_1]\,\ddot{\vartheta}\\ &\quad - 2\,m\,e\,R\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi} - m\,e\,R\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2 = \Delta M\sin\nu\,\omega_0\,t\\ &[m\,e\,(R\cos\vartheta + e) + J_1]\,\ddot{\varphi} + [J_1 + m\,e^2]\,\ddot{\vartheta} + m\,e\,R\sin\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2 = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

Der Vergleich der für den Pendel-Schwingungstilger gültigen Beziehungen (6′) mit dem zum Salomon-Schwingungstilger gehörigen System (6) zeigt, daß die Gleichungsgruppe (6′) durch keine Substitution einer fiktiven „Ersatzmasse" in die beiden Gleichungen (6) übergeführt werden kann. Dies liegt darin begründet, daß das Trägheitsmoment J_1 des Rollkörpers um seine Symmetrieachse sowohl mit dem Beiwert $(-e/r)$ als auch mit $(e/r)^2$ multipliziert aufscheint.

3. Auswertung der Bewegungsgleichungen. Zerlegt man die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ der Schwungmasse in den konstanten Anteil ω_0 und die Störung $\Delta\omega$, schreibt also

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega\,,$$

dann ist wegen $\dot{\omega}_0 = 0$ die Größe $\dot{\omega}$ durch $\Delta\dot{\omega}$ zu ersetzen. Führt man diese Zerlegung in (6) ein und vernachlässigt wie üblich $\Delta\omega$ gegen ω_0, so nimmt das System (6) die folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned}&[J_S + M_0 l^2 + J_1 + m\,(R + e\cos\vartheta)^2 + m\,e^2\sin^2\vartheta]\,\Delta\dot{\omega} + \left[m\,e\,(R\cos\vartheta + e) - J_1\,\frac{e}{r}\right]\ddot{\vartheta}\\ &\quad - 2\,m\,e\,R\,\omega_0\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta} - m\,e\,R\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2 = \Delta M\sin\nu\,\omega_0\,t\,,\\ &\left[m\,e\,(R\cos\vartheta + e) - \frac{e}{r}\,J_1\right]\Delta\dot{\omega} + \left[\left(\frac{e}{r}\right)^2 J_1 + m\,e^2\right]\ddot{\vartheta} + m\,e\,R\,\omega_0^2\sin\vartheta = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Führt man die dimensionslosen Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}&\lambda = \frac{m\,e\,(e - \zeta^2 r)}{J_S}, \qquad \mu = \frac{J_S + M_0 l^2 + m\,\zeta^2 r^2 + m\,(R^2 + e^2)}{J_S}\\ &\varrho = \frac{m\,e^2\,(\zeta^2 + 1)}{J_S}, \quad \sigma = \frac{m\,e\,R}{J_S}, \qquad K = \frac{\Delta M}{J_S\cdot\omega_0^2}, \qquad \omega_0\,t = \tau\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

mit der Bedeutung

$$\zeta^2 = \frac{J_1}{m\,r^2}$$

ein und kennzeichnet man die Ableitungen nach τ durch einen Strich, so erhält man aus (7)

$$\left.\begin{aligned}&(\mu + 2\,\sigma\cos\vartheta)\,\frac{\Delta\omega'}{\omega_0} + (\lambda + \sigma\cos\vartheta)\,\vartheta'' - 2\,\sigma\sin\vartheta\cdot\vartheta' - \sigma\sin\vartheta\cdot\vartheta'^2 = K\sin\nu\,\tau\,,\\ &(\sigma\cos\vartheta + \lambda)\,\frac{\Delta\omega'}{\omega_0} + \varrho\,\vartheta'' + \sigma\sin\vartheta = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Berücksichtigt man, daß ϑ, im Bogenmaß gemessen, praktisch stets kleiner als 1 bleibt und verwendet man demgemäß die Entwicklungen

$$\sin\vartheta \approx \vartheta - \frac{\vartheta^3}{6}, \qquad \cos\vartheta \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2}, \qquad \frac{1}{\lambda + \sigma\cos\vartheta} \approx \frac{1}{\lambda + \sigma} + \frac{\sigma}{2(\lambda + \sigma)^2}\,\vartheta^2$$

unter Streichung der Glieder höherer als dritter Ordnung in ϑ bzw. der Produkte von ϑ und dessen Ableitungen, so gehen nach Elimination von $\Delta\omega'/\omega_0$ aus der ersten Beziehung (9) die beiden Bewegungsgleichungen über in die Form

$$\left.\begin{aligned}&a_1\,\vartheta'' + a_2\,\vartheta + a_3\,\vartheta^3 + a_4\,\vartheta''\vartheta^2 + a_5\,\vartheta\vartheta'^2 + a_6\,\vartheta\vartheta' = K\sin\nu\,\tau\\ &\frac{\Delta\omega'}{\omega_0} = c_1\,\vartheta'' + c_2\,\vartheta + c_3\,\vartheta^3 + c_4\,\vartheta''\vartheta^2\,.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Dabei wurden die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}a_1 &= (\lambda + \sigma) - \frac{\varrho\,(\mu + 2\,\sigma)}{\lambda + \sigma},\\ a_2 &= -\frac{\sigma\,(\mu + 2\,\sigma)}{\lambda + \sigma},\\ a_3 &= \frac{\sigma\,(\mu + 8\,\sigma)}{6\,(\lambda + \sigma)} - \frac{\sigma^2\,(\mu - 2\,\sigma)}{2\,(\lambda + \sigma)^2},\\ a_4 &= \frac{\sigma\,\varrho}{\lambda + \sigma} - \frac{\sigma\,\varrho\,(\mu + 2\,\sigma)}{2\,(\lambda + \sigma)^2} - \frac{\sigma}{2},\\ a_5 &= -\sigma\,,\\ a_6 &= -2\,\sigma\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -\frac{\varrho}{\lambda+\sigma}, & c_3 &= \frac{\sigma}{6(\lambda+\sigma)} - \frac{\sigma^2}{2(\lambda+\sigma)^2}, \\ c_2 &= -\frac{\sigma}{\lambda+\sigma}, & c_4 &= -\frac{\varrho\,\sigma}{2(\lambda+\sigma)^2} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

verwendet.

Führen wir die Lösung des linearen Anteiles der ersten der beiden Gleichungen (10)

$$\vartheta_1 = \frac{K}{a_2 - \nu^2 a_1} \sin \nu\,\tau \tag{13}$$

zur Durchführung des Iterationsschrittes in die nicht linearen Glieder dieser Gleichung ein, so erhalten wir bei etwas geänderter Anordnung die Beziehung

$$\begin{aligned} a_1\,\vartheta'' + a_2\,\vartheta = &\left[K - \frac{3(a_3 - \nu^2 a_4) + \nu^2 a_5}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^3} K^3\right] \sin \nu\,\tau \\ &- \frac{\nu\, a_6}{2(a_2 - \nu^2 a_1)^2} K \sin 2\,\nu\,\tau + \frac{a_3 - \nu^2(a_4 + a_5)}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^3} K^3 \sin 3\,\nu\,\tau\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Die für den stationären Zustand des Systems gültige partikuläre Lösung lautet

$$\begin{aligned} \vartheta_2 = &\left[\frac{K}{a_2 - \nu^2 a_1} - \frac{3(a_3 - \nu^2 a_4) + \nu^2 a_5}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^4} K^3\right] \sin \nu\,\tau - \frac{\nu\, a_6}{2[a_2 - (2\nu)^2 a_1](a_2 - \nu^2 a_1)^2} K^2 \sin 2\,\nu\,\tau \\ &+ \frac{a_3 - \nu^2(a_4 + a_5)}{4[a_2 - (3\nu)^2 a_1](a_2 - \nu^2 a_1^3)} K^3 \sin 3\,\nu\,\tau\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Durch weitere Iterationsschritte ließe sich auf diesem Wege eine beliebig lange *Fourier*-Reihe für $\vartheta(\tau)$ bestimmen.

Setzt man den Ausdruck (15) in die zweite Gleichung (10) ein, so geht diese nach Durchführung einiger einfacher Umformungen, wenn man die Glieder bis einschließlich dritter Ordnung im Parameter K berücksichtigt, nach Integration nach τ über in die Form

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = &-\frac{1}{\nu}\left[\frac{c_2 - \nu^2 c_1}{a_2 - \nu^2 a_1} K - (c_2 - \nu^2 c_1)\frac{3(a_3 - \nu^2 a_4) + \nu^2 a_5}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^4} K^3 + \frac{3(c_3 - \nu^2 c_4)}{4(a_2 - \nu^2 a_1)^3} K^3\right] \cos \nu\,\tau \\ &+ \frac{[c_2 - (2\nu)^2 c_1]\, a_6}{4[a_2 - (2\nu)^2 a_1](a_2 - \nu^2 a_1)^2} K^2 \cos 2\,\nu\,\tau \\ &- \frac{1}{12\,\nu}\left\{\frac{[c_2 - (3\nu)^2 c_1][a_3 - \nu^2(a_4 + a_5)]}{[a_2 - (3\nu)^2 a_1](a_2 - \nu^2 a_1)^3} - \frac{c_3 - \nu^2 c_4}{(a_2 - \nu^2 a_1)^3}\right\} K^3 \cos 3\,\nu\,\tau\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Diese Lösung für die bezogene Winkelgeschwindigkeitsschwankung $\Delta\omega/\omega_0$ der Schwungmasse ist in ihrer Form analog jener für den als physikalisches Pendel aufgefaßten Pendel-Schwingungstilger gültigen Beziehung[1]. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß die Größen a_i und c_i entsprechend der verschiedenen Zahl von Parametern des Systems vollkommen verschiedene Bedeutung haben.

Die Rechtfertigung für die Streichung der höheren Potenzen von K in (16) folgt analog wie beim gewöhnlichen Pendel-Schwingungstilger aus der Größenabschätzung des dimensionslosen Parameters K an Hand von ausgeführten Motoren. Je nach Arbeitsdiagramm, Kurbelwellenkonstruktion und Drehzahl der Maschine ergibt sich K in der Größenordnung von 10^{-5} bis 10^{-3}.

Die Gleichung (16) zeigt, daß das Glied erster Größenordnung in K durch Einhaltung der Bedingung

$$\frac{c_2 - \nu^2 c_1}{a_2 - \nu^2 a_1} = \frac{-\sigma + \nu^2 \varrho}{(\mu + 2\,\sigma)(-\sigma + \nu^2 \varrho) - \nu^2(\lambda + \sigma)^2} = 0 \tag{17}$$

zum Verschwinden gebracht werden kann. Diese Beziehung führt zur sogenannten ersten Abstimmbedingung

$$\nu^2 = \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{R}{e(\zeta^2 + 1)}. \tag{18}$$

---

[1] Siehe Fußnote 5 von S. 182.

Führt man (18) in (16) ein, so verbleibt bei Vernachlässigung der Glieder dritter und höherer Potenzen in K für die bezogene Winkelgeschwindigkeitsschwankung der Ausdruck

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{3(\zeta^2+1)\cdot e\cdot J_S}{2\,R\,m\,(e-\zeta^2 r+R)^2\left\{\frac{4}{\zeta^2+1}(e-\zeta^2 r+R)^2-3\left[\frac{J_0}{m}+\zeta^2 r^2+(R+e)^2\right]\right\}} K^2\cos 2\nu\tau\,. \tag{19}$$

Um möglichst gleichförmigen Lauf der Maschine zu erzielen, haben wir also danach zu streben, den Absolutbetrag des Koeffizienten von $K^2\cos 2\nu\tau$ in (19) entsprechend den konstruktiven Möglichkeiten möglichst klein zu machen. Gleichung (19) zeigt, daß dieser Koeffizient als Funktion der Masse m des Rollkörpers nur für unendlich großen Tilger verschwindet.

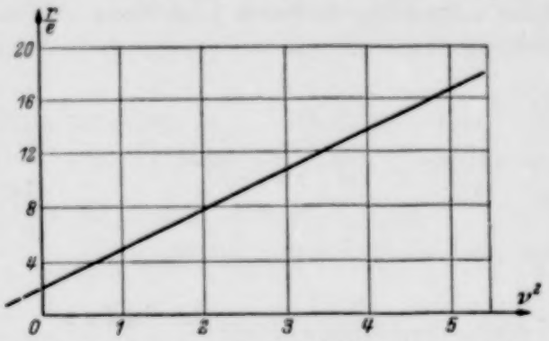


Abb. 3. Kritische Werte des Verhältnisses r/e als Funktion des Quadrates der Abstimmfrequenz.

Die Beziehung (19) zeigt jedoch weiter, daß unendlich große Amplituden (Resonanz) trotz Einhaltung der ersten Abstimmbedingung eintreten, wenn die Beziehungen

$$(e-\zeta^2 r+R)=0 \tag{20}$$

oder

$$\frac{4}{\zeta^2+1}(e-\zeta^2 r+R)^2 - 3\left[\frac{J_0}{m}+\zeta^2 r^2+(R+e)^2\right]=0 \tag{21}$$

erfüllt sind.

Bei Berücksichtigung, daß wir (19) unter Einhaltung der ersten Abstimmbedingung für den Salomon-Schwingungstilger erhielten, verbleibt nach Elimination von R aus (20) bei Beschränkung auf kreiszylindrische Tilgerkörper ($\zeta^2 = 1/2$) die Beziehung

$$2+3\nu^2-\frac{r}{e}=0\,. \tag{22}$$

Diese stellt für die Amplitude des Termes doppelter Winkelgeschwindigkeit die Resonanzlinie dar; sie ist in Abb. 3 gezeichnet.

Die zweite Bedingung (21) hat für den praktisch in Frage kommenden Rollkörper kreiszylindrischer Gestalt keine Bedeutung.

Obwohl der Beiwert von $K^2\cos 2\nu\tau$ in (19) lediglich für unendlich große Rollermasse verschwindet, so ist es doch möglich, die Amplitude der bezogenen Winkelgeschwindigkeitsschwankung im Rahmen der konstruktiven Möglichkeiten als Funktion der verbleibenden Parameter zu einem Minimum zu machen. Z. B. liefert bei Vorwahl aller Werte außer R die kubische Gleichung

$$\left(e-\frac{r}{2}+3R\right)\left\{4\left(e-\frac{r}{2}+R\right)^2-\frac{9}{2}\left[\frac{J_0}{m}+\frac{r^2}{2}+(R+e)^2\right]\right\} + \left(e-\frac{r}{2}+R\right)R\left[8\left(e+\frac{r}{2}+R\right)-9(R+e)\right]=0 \tag{23}$$

die optimalen Werte für den Abstand R von Schwungmassen-Drehmittel zum Mittelpunkt der Rollbahn des Salomon-Schwingungstilgers.

4. Zusammenfassung. Der Vergleich der Bewegungsgleichungen des Salomon-Schwingungstilgers mit jenen des gewöhnlichen Pendel-Schwingungstilgers zeigt, daß die beiden Gleichungssysteme nicht ineinander übergeführt werden können. Dies hat zur Folge, daß der Salomon-Schwingungstilger nicht, wie häufig angegeben, durch Substitution einer „Ersatzmasse" mit den Gleichungen des Pendel-Schwingungstilgers behandelt werden kann. Diese bisher übliche Art der Behandlung kann also nicht als eine Näherungslösung angesehen werden.

Bei Zugrundelegung eines mathematischen Pendels für einen Pendel-Schwingungstilger stehen an Veränderlichen drei freie Parameter, nämlich die Pendelmasse, die Pendellänge und die Entfernung des Anlenkpunktes des Pendels vom Wellenmittel zur Verfügung. Betrachtet man den Tilger als physikalisches Pendel, so steht dem Konstrukteur der Trägheitshalbmesser des Pendelkörpers als weitere Veränderliche frei. Für die Auslegung eines Salomon-Schwingungstilgers stehen zur günstigsten Kombination fünf Parameter zur Verfügung, diese sind die geometrischen Größen R, e, τ, ζ und die Masse des Rollkörpers m.

Vor Durchführung des Entwurfes für einen Salomon-Schwingungstilger muß über die zu tilgende Ordnung ν — nach ausgeführter Schwingungsrechnung für die tilgerlose Anordnung — ein Entscheid getroffen werden. Für diese gewählte Ordnung ν müssen nun die Parameter R, e und ζ so gewählt werden, daß die erste Abstimmbedingung (18) erfüllt wird. Die verbleibenden Veränderlichen haben dem Zweck zu dienen, den Ausdruck für die Amplitude der verbleibenden bezogenen Winkelgeschwindigkeitsschwankung entsprechend (19) möglichst klein zu machen. Weiter folgt aus (19), daß die Frequenz des Hauptanteiles der verbleibenden bezogenen Winkelgeschwindigkeitsschwankung den doppelten Betrag der Abstimmungsfrequenz hat.

Die erste Abstimmbedingung wurde von den linearisierten Gleichungen des Systems geliefert. Es zeigt sich, daß sie auch für die nichtlinearisierte Behandlung ihre Gültigkeit beibehält. Die nichtlinearisierte Rechnung liefert eine weitere Beziehung, welche zur zweckmäßigen Kombination der verbleibenden Parameter verwendet werden kann. Ferner zeigt sich, daß trotz Einhaltung der ersten Abstimmbedingung in den Gliedern mit doppelter Abstimmfrequenz Resonanz auftreten kann.

Falls bei besonders großen Ausschlägen des Tilgerkörpers Gleiten auf der Rollbahn auftritt so stellt diese dissipative Kraft einen Dämpfungseffekt dar[1].

(Eingegangen am 15. November 1955.)

Anschrift der Verfasser: Dr. *P. R. Paslay*, Asst. Prof. of Mech. Engr., Massachusetts Inst. of Techn., currently at General Electric Co., Schenectady, N.Y., USA; Doz. Dr. *Alfred Slibar*, Technische Hochschule, Wien IV., Karlspl. 13; derzeit visiting Fellow of the Foreign Operations Administration, Scientists Research Project, Stanford University, Mech. Eng. Dep.

[1] *R. E. Gorton*, J. Appl. Mech., 20 (1953), S. 142.

Zur algebraischen Maßsynthese ebener Kurbelgetriebe

I. Mitteilung

Von K.-H. Sieker

1. Problemstellung. Soll von einer Welle I (Abb. 1) auf eine zur ersten parallelen Welle II eine Drehbewegung in der Weise übertragen werden, daß der Drehwinkel ψ der Welle II eine bestimmte gegebene Funktion des Drehwinkels φ der Welle I verwirklicht, so kann die Funktion über einen größeren Bereich genau erfüllt werden, wenn z. B. Kurvengetriebe in der Form von Kurvenscheibengetrieben oder Wälzkurvengetrieben verwendet werden. Sollen aber die baulich einfacheren, für den Betrieb günstigeren Kurbelgetriebe benutzt werden, so läßt sich die Funktion nur punktweise erfüllen. Wird im einfachsten Falle ein viergliedriges ebenes Kurbelgetriebe (Abb. 2) verwendet, so können von einer Funktion $y = f(x)$ (Abb. 3) höchstens fünf Punkte genau erfüllt werden. Um die Aufgabenstellung auf einfache Zuordnungen zurückzuführen, werden die Koordinatenachsen parallel verschoben und durch einen der gegebenen Punkte gelegt. Für die Koordinatentransformation erhält man dann die Beziehungen:

$$x = m_\varphi \varphi + x_0, \tag{1}$$

$$y = m_\psi \psi + y_0. \tag{2}$$

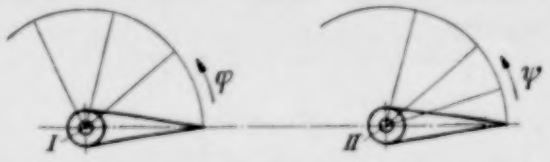


Abb. 1. Drehung zweier Wellen I und II nach einer Funktion $y = f(\varphi)$.

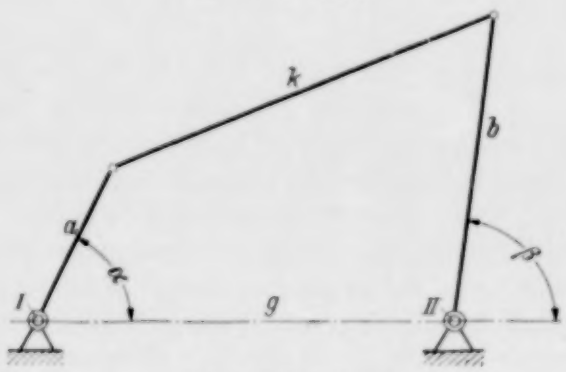


Abb. 2. Gelenkviereck.

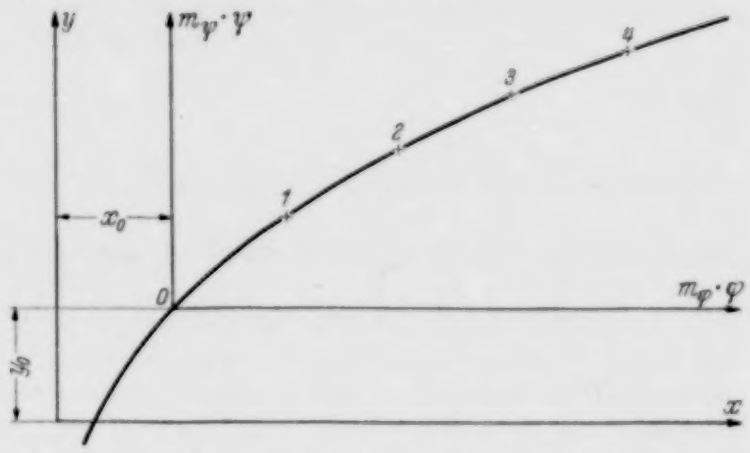


Abb. 3. Darstellung der Funktion $y = f(x)$ bzw. $\psi = f(\varphi)$: $x = x_0 + m_\varphi \varphi$ und $y = y_0 + m_\psi \psi$.

Dabei sind x_0 und y_0 die Koordinaten des neuen Achsennullpunktes; auf der Abszissenachse wird $m_\varphi \varphi$ und auf der Ordinatenachse $m_\psi \psi$ aufgetragen, wobei m_φ und m_ψ Maßstabskonstanten sind. Den vier Punkten 1 bis 4 der Funktion $\psi = f(\varphi)$ entsprechen dann vier Winkel φ_1 bis φ_4 der Welle I, denen vier Winkel ψ_1 bis ψ_4 der Welle II zugeordnet sind.

Für die Lösung des Problems sind geometrische Verfahren bekannt, die auf die grundlegenden Arbeiten von *Burmester* zurückgehen[1] und in der Hauptsache von *Alt* entwickelt worden sind[2]. Diese Verfahren sind von anderen Wissenschaftlern weiter ausgebaut worden[3] und haben Eingang in das neuere Schrifttum der Getriebelehre gefunden[4].

Sind drei Winkelpaare einander zugeordnet, so können die gesuchten Koppelgelenkpunkte auf Kurven gewählt werden, die für die Bewegung des Lenkers a relativ zum Lenker b in der

[1] *L. Burmester*, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888.

[2] *H. Alt*, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921) S. 373 und 3 (1923) S. 13.

[3] *R. Kraus*, Mitt. Techn. Inst. d. chin. staatl. Thung-Chi-Universität Woosung 2 (1935) S. 5. — *W. Lichtenheldt*, Einfache Konstruktionsverfahren zur Ermittlung der Abmessungen von Kurbelgetrieben, VDI-Forschungsheft 408, Berlin 1941. — *K. Hain*, Feinmech. u. Präz. 49 (1941) S. 219; Getriebetechnik 10 (1942) S. 218; Getriebetechnik 11 (1943) S. 29; Z. Instrumentenkde. 63 (1943) S. 170; und 64 (1944) S. 96.

[4] *G. Kiper*, Synthese der ebenen Gelenkgetriebe, VDI-Forschungsheft 433, Düsseldorf 1952; Konstruktion 6 (1954) S. 300. — *R. Kraus*, Grundlagen der Getriebelehre, Wolfenbüttel 1949; Getriebelehre, Berlin 1951. — *K.-H. Sieker*, Einfache Getriebe, Füssen/Leipzig 1950. — *K. Hain*, Angewandte Getriebelehre, Hannover 1952. — *R. Beyer*, Kinematische Getriebesynthese, Berlin 1953.

Getriebesynthese unter dem Namen Mittelpunkt- und Kreispunktkurve bekannt sind. Sind vier Winkelpaare gegeben, so sind für die Bewegung des Gliedes *a* relativ zu *b* die Koppelgelenke durch die *Burmester*schen Punkte bestimmt. Je nach den vorgegebenen Werten gibt es entweder einen Punkt oder drei Punkte für jedes Koppeldrehgelenk.

Rücken in der gegebenen Funktion $y = f(x)$ (Abb. 3) die gegebenen Punkte in unmittelbare Nachbarschaft, so daß die Abstände infinitesimal werden, so kann diese Bedingung ebenfalls durch Kurvengetriebe erfüllt werden. Rücken zwei Punkte 0 und 1 in infinitesimale Nachbarschaft, so ist damit die Steigung der Kurve an dieser Stelle bestimmt, die sich algebraisch durch den Differentialquotienten dy/dx bzw. $d\psi/d\varphi$ darstellen läßt. Durch drei Punkte, z. B. 0, 1 und 2 in infinitesimalem Abstand ist die Krümmung der Kurve an dieser Stelle bestimmt, die außer vom Differentialquotienten 1. Ordnung von dem 2. Ordnung abhängt. Vier Punkte in infinitesimalem Abstand bestimmen die Ableitungen der Veränderlichen bis zur dritten Ordnung und fünf Punkte bis zur vierten Ordnung.

Ist von einer Funktion die Ableitung bis zur dritten Ordnung an einer Stelle vorgesehen, so läßt sie sich durch die Drehung der beiden Lenker eines Gelenkviereckes verwirklichen, wobei die Koppelgelenke auf der Kreisungspunkt- und Angelpunktkurve der Bewegung des Gliedes *a* relativ zu *b* gewählt werden können[1]. Diese beiden Kurven sind hauptsächlich von *Grübler* näher untersucht worden[2]. Ist die Ableitung bis zur vierten Ordnung gegeben[3], so gibt es nach den gegebenen Werten einen Punkt oder drei Punkte für jeden Koppelgelenkpunkt, die ebenfalls *Burmester*sche Punkte genannt werden, und demnach eine oder drei Lösungen der Aufgaben.

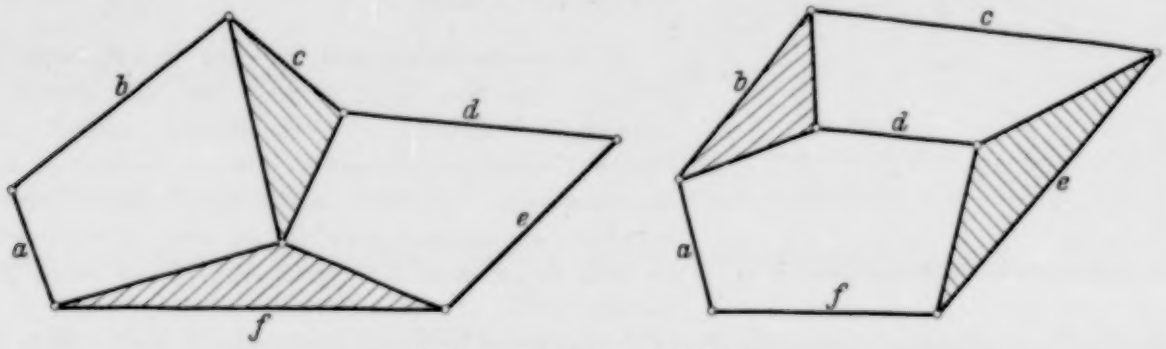


Abb. 4. Sechsgliedrige Gelenkketten.

In der vorliegenden Arbeit sollen diese Zusammenhänge algebraisch in der *Gauß*schen Zahlenebene mittels komplexer Zahlen dargestellt werden. Die Verwendung dieses Verfahrens für die Getriebelehre ist nicht neu[4] und auch in neueren Arbeiten ist von mehreren Autoren dieses Verfahren angewendet worden[5]. Mit ihm können komplizierte Beziehungen übersichtlich mittels algebraischer Formeln dargestellt werden, mit denen Berechnungen beliebiger Genauigkeit durchgeführt werden können. Außerdem können aus den Formeln weitere Schlüsse gezogen und damit Erkenntnisse gewonnen werden, die die geometrischen Verfahren nicht geben können. Die Zuordnung von vier Winkelpaaren im Gelenkviereck und von vier Winkeln mit vier Längen in der Schubkurbel ist nach diesem Verfahren bereits dargestellt worden[6]. Aber auch bei Vorgabe der Ableitungen an einem Punkt der Funktion bis zur vierten Ordnung lassen sich die Abmessungen des Gelenkviereckes auf diese Weise durch einfache Formeln darstellen. Die Entwicklung dieser Formeln wird in dieser Arbeit gegeben.

Die Kombination von Punkten einer gegebenen Funktion mit endlichem und infinitesimalem Abstand, die mit einem anderen Verfahren bisher noch nicht behandelt werden konnte, ist mit dem hier angewandten Verfahren — wie gezeigt werden soll — ohne weiteres möglich.

Sollen mehr als fünf Punkte einer Funktion $y = f(x)$ durch Winkelzuordnungen $\psi = f(\varphi)$ getrieblich verwirklicht werden, so reicht das viergliedrige Kurbelgetriebe nicht mehr aus. Das

---

[1] *R. Kraus*, Feinwerktechn. 58 (1954) S. 186.

[2] *M. Grübler*, Z. Math. Mech. 37 (1892) S. 35. — *R. Müller*, Einführung in die theoretische Kinematik, Berlin 1932, S. 42.

[3] *K.-H. Sieker*, Die Technik 3 (1948) S. 170.

[4] *G. Darboux*, Bull. sci. math. astr. 14 (1879) S. 109 u. S. 151.

[5] *E. Hackmüller*, Z. angew. Math. Mech. 18 (1938) S. 252; Ing.-Arch. 14 (1943) S. 141. — *W. Wunderlich*, Österr. Ing.-Arch. 1 (1947) S. 277 und 4 (1950) S. 3. — *R. Bereis*, Österr. Ing.-Arch. 5 (1951) S. 246 und 6 (1952) S. 246.

[6] *K.-H. Sieker*, Winkelzuordnungen am Gelenkviereck, VDI-Berichte Bd. 5 Getriebetechnik, Düsseldorf 1955; Konstruktion 6 (1954) S. 351.

zwangläufige Kurbelgetriebe mit der nächsthöheren Gliedzahl ist das sechsgliedrige mit sieben Gelenken, dessen Bauformen sich aus zwei verschiedenen sechsgliedrigen Gelenkketten (Abb. 4) bilden lassen. Mit diesen sechsgliedrigen Kurbelgetrieben können bis zu zehn Winkelzuordnungen entsprechend elf Punkten einer Funktion verwirklicht werden. Auch hierfür lassen sich, wie in einer II. Mitteilung gezeigt werden soll, mittels der Darstellung in der *Gauß*schen Zahlenebene durch Verwendung komplexer Größen Formeln entwickeln, mit denen die Abmessungen des Kurbelgetriebes aus den gegebenen Winkelzuordnungen berechnet werden können. Die Formeln haben einen einfachen Aufbau; die Rechnung ist ebenfalls einfach und übersichtlich, aber wegen der Bestimmung höherstelliger Determinanten zeitraubend, so daß ein einzelner Bearbeiter diese Arbeit ohne besondere Hilfsmittel allein wohl kaum bewältigen kann. Wenn aber eine der neueren elektrischen Rechenmaschinen benutzt werden kann, dürfte die Rechnung keine Schwierigkeiten machen.

Damit ermöglicht die algebraische Methode, auf die getriebliche Maßsynthese angewendet, die Lösung eines Problems, das bisher nicht gelöst worden ist und in der Getriebelehre bisher als nicht lösbar galt. Auch das Auffinden des Gelenkviereckes aus neun vorgegebenen Koppelpunkten, das bisher nicht möglich war, ist, wie gezeigt werden soll, mit dieser Methode durchführbar. Die abgeleiteten Beziehungen können u. a. ebenfalls für die Ermittlung sechsgliedriger Kurbelgetriebe aus Winkelzuordnungen verwendet werden.

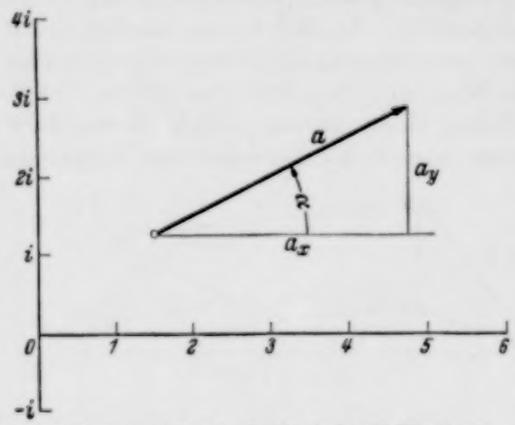


Abb. 5. Planvektor $\mathfrak{a}$ in der *Gauß*schen Zahlenebene.

2. Grundbeziehungen in der *Gauß*schen Zahlenebene. Um das Verständnis für das Rechnen mit komplexen Zahlen zu erleichtern, sollen zunächst einige Grundbeziehungen, wie sie sich aus der Darstellung von Vektoren in der *Gauß*schen Zahlenebene ergeben, zusammengestellt werden, von denen dann in den folgenden Entwicklungen Gebrauch gemacht werden soll.

Werden auf der Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems die reellen und auf der Ordinatenachse die imaginären Zahlen mit der Einheit $i = \sqrt{-1}$ aufgetragen, so läßt sich ein Planvektor — auch Zeiger genannt — durch eine komplexe Zahl darstellen. Setzt man für die Vektoren deutsche Buchstaben, so erhält man (Abb. 5):

$$\mathfrak{a} = a_x + i\,a_y . \tag{3}$$

Hier ist a_x der reelle Bestandteil des Vektors $\mathfrak{a}$, den man erhält, wenn man die Länge a des Vektors auf die Abszissenachse projiziert. Entsprechend ist a_y der imaginäre Bestandteil des Vektors $\mathfrak{a}$, der sich durch Projektion auf die Ordinatenachse ergibt. Ist α der Neigungswinkel des Vektors, den dieser mit der positiven reellen Zahlenachse bildet, so ist

$$a_x = a \cos\alpha , \tag{4}$$

$$a_y = a \sin\alpha . \tag{5}$$

Hierin ist a der Betrag des Vektors $\mathfrak{a}$. Durch Zusammenfassen der beiden Gleichungen (4) und (5) erhält man

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} , \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x} . \tag{7}$$

Setzt man (4) und (5) in (3) ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{a} = a\,(\cos\alpha + i \sin\alpha) \tag{8}$$

Unter Berücksichtigung der *Euler*schen Formel

$$\cos\alpha + i \sin\alpha = e^{i\alpha} \tag{9}$$

erhält man weiterhin:

$$\mathfrak{a} = a\,e^{i\alpha} . \tag{10}$$

Die Gleichungen (3), (8) und (10) sind also die drei Darstellungsformen eines Vektors $\mathfrak{a}$.

Werden zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aneinandergereiht (Abb. 6), so ergibt sich ein resultierender Vektor $\mathfrak{r}$ aus der Summe der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{r}. \tag{11}$$

Bezeichnet man entsprechend die Beträge der Vektoren mit a, b und r und die Neigungswinkel mit α, β und ϱ, so erhält man die Beziehungen

$$a(\cos\alpha + i\sin\alpha) + b(\cos\beta + i\sin\beta) = r(\cos\varrho + i\sin\varrho). \tag{12}$$

Es ist also, wenn man die reellen und die imaginären Bestandteile trennt und jeweils gleichsetzt,

$$r\cos\varrho = a\cos\alpha + b\cos\beta, \tag{13}$$

$$r\sin\varrho = a\sin\alpha + b\sin\beta. \tag{14}$$

Entsprechende Beziehungen gelten beim Subtrahieren.

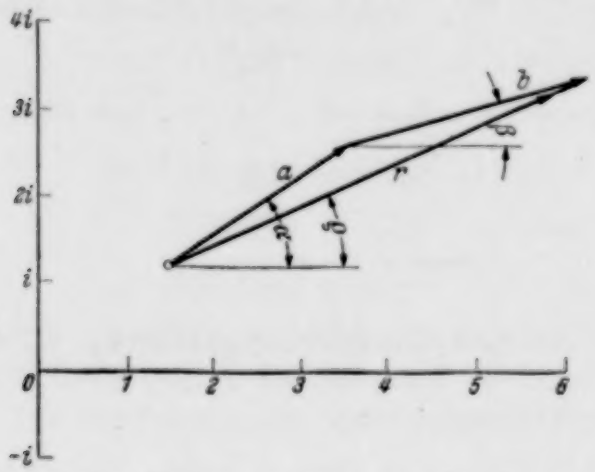


Abb. 6. Addition zweier Vektoren $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{r}$.

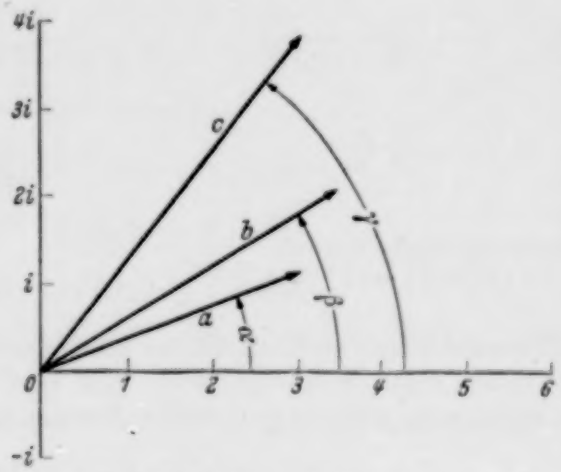


Abb. 7. Multiplikation zweier Vektoren $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

Auch das Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (Abb. 7) ist wieder ein Vektor $\mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{c}. \tag{15}$$

Um die Größe c und Richtung γ des Vektors $\mathfrak{c}$ aus den Bestimmungsstücken a, b, α und β der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu ermitteln, ist die Verwendung der Darstellungsform (10) vorteilhaft:

$$e\,a^{i\alpha}\,b\,e^{i\beta} = c\,e^{i\gamma}. \tag{16}$$

Daraus ergibt sich

$$c = a\,b, \tag{17}$$

$$\gamma = \alpha + \beta. \tag{18}$$

Auch die Division zweier Vektoren läßt sich in entsprechender Weise darstellen.

Wird ein Vektor $\mathfrak{a}$ mit einem Einheitsvektor $\mathfrak{e} = e^{i\varphi}$, d. h. mit einem Vektor der Länge 1, multipliziert, so ergibt sich

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{e} = a\,e^{i\alpha}\,e^{i\varphi} = a\,e^{i(\alpha+\varphi)}. \tag{19}$$

Der Vektor $\mathfrak{a}$ ist dadurch um den Winkel φ gedreht worden (Abb. 8).

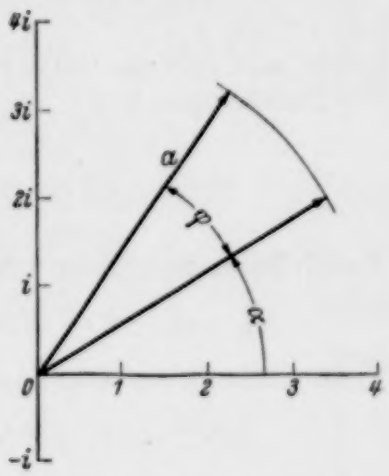


Abb. 8. Drehung eines Vektors: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e} = a\,e^{i(\alpha+\varphi)}$.

Der zu einem Vektor konjugierte Vektor hat den konjugiert-komplexen Wert, d. h. sowohl die reellen als auch die imaginären Bestandteile sind gleich groß, die reellen Bestandteile haben auch das gleiche Vorzeichen, die imaginären Bestandteile dagegen haben entgegengesetzte Vorzeichen. Der zum Vektor $\mathfrak{a}$ konjugierte Vektor soll $\bar{\mathfrak{a}}$ geschrieben werden; sein Wert ist

$$\bar{\mathfrak{a}} = a_x - i\,a_y = a(\cos\alpha - i\sin\alpha) = a\,e^{-i\alpha}. \tag{20}$$

Der Vektor $\bar{\mathfrak{a}}$ hat dieselbe Länge wie sein konjugierter Vektor $\mathfrak{a}$, sein Neigungswinkel α ist dagegen negativ, wenn der des Vektors $\mathfrak{a}$ positiv ist (Abb. 9).

Sowohl die Summe als auch das Produkt zweier konjugierter Vektoren ergeben Vektoren mit reellen Werten:

$$\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}} = a_x + i\,a_y + a_x - i\,a_y = 2\,a_x, \tag{21}$$

$$\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}} = a\,e^{i\alpha}\,a\,e^{-i\alpha} = a^2. \tag{22}$$

Die Differenz zweier konjugierter Vektoren ergibt einen Vektor mit imaginärem Wert:

$$\mathfrak{a} - \bar{\mathfrak{a}} = a_x + i\,a_y - a_x + i\,a_y = i\,2\,a_y\,. \tag{23}$$

Der Quotient zweier konjugierter Vektoren ist ein Vektor, dessen Länge 1 und dessen Neigungswinkel doppelt so groß ist, wie der des im Zähler stehenden Vektors:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\bar{\mathfrak{a}}} = \frac{a \cdot e^{i\alpha}}{a \cdot e^{-i\alpha}} = e^{i\,2\,\alpha}\,. \tag{24}$$

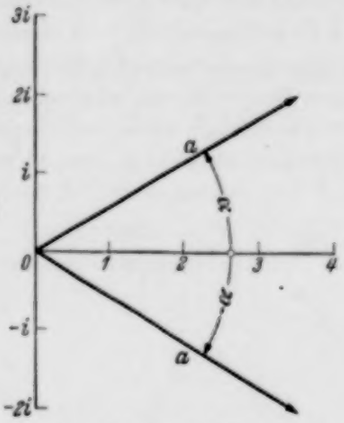


Abb. 9. Konjugierte Vektoren: $\mathfrak{a} = a\,e^{i\alpha}$ und $\bar{\mathfrak{a}} = a\,e^{-i\alpha}$.

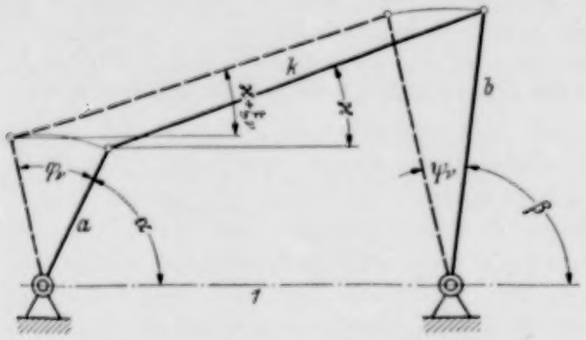


Abb. 10. Bezeichnungen am Gelenkviereck.

3. Zuordnung von Winkeln am Kurbelgetriebe mit vier Drehgelenken (Gelenkviereck). Werden die Glieder eines Kurbelgetriebes mit vier Drehgelenken als Planvektoren aufgefaßt, so ergibt sich mit den in Abb. 10 gewählten Bezeichnungen die Vektorgleichung

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{k} - \mathfrak{b} - 1 = 0\,. \tag{25}$$

Die Drehachse I ist als Schnittpunkt der Achsen der *Gauß*schen Zahlenebene gewählt, wobei die reelle Zahlenachse durch die Drehachse II und die imaginäre Zahlenachse senkrecht dazu verläuft.

Wird der Lenker a um den Winkel φ_ν gedreht, so dreht sich der Lenker b um den Winkel ψ_ν und der Neigungswinkel der Koppel ändert sich um die Größe ξ_ν. Die Vektorgleichung nimmt dann folgende Form an:

$$\mathfrak{a}\,e^{i\,\varphi_\nu} + \mathfrak{k}\,e^{i\psi_\nu} - \mathfrak{b}\,e^{i\,\psi_\nu} - 1 = 0\,. \tag{26}$$

Denkt man sich das Getriebe an der reellen Zahlenachse gespiegelt, so erhält man für diese Lage die Gleichungen

$$\bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{k}} - \bar{\mathfrak{b}} - 1 = 0\,, \tag{27}$$

$$\bar{\mathfrak{a}}\,e^{-i\,\varphi_\nu} + \bar{\mathfrak{k}}\,e^{-i\,\xi_\nu} - \bar{\mathfrak{b}}\,e^{-i\,\psi_\nu} - 1 = 0\,. \tag{28}$$

Durch Zusammenfassen von (25) bis (28) erhält man

$$\mathfrak{k}\,\bar{\mathfrak{k}} = (1 + \mathfrak{b} - \mathfrak{a})\,(1 + \bar{\mathfrak{b}} - \bar{\mathfrak{a}}) = (1 + \mathfrak{b}\,e^{i\,\psi_\nu} - \mathfrak{a}\,e^{i\,\varphi_\nu})\,(1 + \bar{\mathfrak{b}}\,e^{-i\,\psi_\nu} - \bar{\mathfrak{a}}\,e^{-i\,\varphi_\nu})\,. \tag{29}$$

Nach Auflösen der Klammer und Ordnen der Glieder ergibt sich aus (29)

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}\,(e^{i\,\varphi_\nu} - 1) + \bar{\mathfrak{a}}\,(e^{-i\,\varphi_\nu} - 1) - \mathfrak{b}\,(e^{i\psi_\nu} - 1) - \bar{\mathfrak{b}}\,(e^{-i\,\psi_\nu} - 1)\\ + \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,(e^{i(\varphi_\nu - \psi_\nu)} - 1) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,(e^{-i(\varphi_\nu - \psi_\nu)} - 1) = 0\,.\end{aligned} \tag{30}$$

Bezeichnet man die in den Klammern stehenden Vektoren mit $\mathfrak{F}$ und den entsprechenden Indizes, wobei in Klammern dahinter gesetzt wird, von welchen Winkeln $\mathfrak{F}$ abhängt, so nimmt (30) folgende Form an:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) - \mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_\nu(\psi) - \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\psi) + \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi) = 0\,. \tag{31}$$

Sind drei Winkelpaare φ_1 bis φ_3 und ψ_1 bis ψ_3 gegeben, so erhält man aus (31) drei Gleichungen mit $\nu = 1$ bis 3; bei vier vorgegebenen Winkelpaaren stehen vier solche Gleichungen zur Verfügung.

a) Zuordnung von drei Winkelpaaren. Gleichung (31) läßt sich wie folgt umformen:

$$\mathfrak{b}\,[\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_\nu(\psi)] + \bar{\mathfrak{b}}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\psi)] + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi)] = 0\,. \tag{32}$$

Werden durch Einsetzen von $\nu = 1$ bis 3 drei Gleichungen dieser Form gebildet, so erhält man durch ihre Zusammenfassung

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}\,\overline{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_1(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(\varphi\psi) - \overline{\mathfrak{F}}_1(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}_1(\varphi) \\ \mathfrak{a}\,\overline{\mathfrak{F}}_2(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_2(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_2(\varphi\psi) - \overline{\mathfrak{F}}_2(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_2(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}_2(\varphi) \\ \mathfrak{a}\,\overline{\mathfrak{F}}_3(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_3(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_3(\varphi\psi) - \overline{\mathfrak{F}}_3(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_3(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}_3(\varphi) \end{vmatrix} = 0\,. \tag{33}$$

Die $\mathfrak{F}$-Vektoren sind bekannt und lassen sich aus den gegebenen Winkeln φ_1, φ_2, φ_3 und ψ_1, ψ_2, ψ_3 bestimmen. Gleichung (33) stellt mit den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ eine Beziehung dar zwischen der Länge des Lenkers a und dem Winkel α seiner Anfangslage. Sie ist eine algebraische Formel für eine Kurve, die in der Getriebesynthese unter der Bezeichnung „Kreispunktkurve" für die Bewegung des Getriebegliedes a relativ zu b bekannt ist.

Gibt man (31) folgende Form:

$$\mathfrak{a}\,[\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi) + \mathfrak{F}_\nu(\varphi)] + \bar{\mathfrak{a}}\,[\mathfrak{b}\,\overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi) + \overline{\mathfrak{F}}(\varphi)] - [\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_\nu(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\overline{\mathfrak{F}}_\nu(\psi)] = 0\,. \tag{34}$$

so ergibt sich eine zweite dreistellige Determinante für den Vektor $\mathfrak{b}$:

$$\begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_1(\varphi\psi) + \mathfrak{F}_1(\varphi) & \mathfrak{b}\,\overline{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) + \overline{\mathfrak{F}}_1(\varphi) & \mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_1(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\overline{\mathfrak{F}}_1(\psi) \\ \bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_2(\varphi\psi) + \mathfrak{F}_2(\varphi) & \mathfrak{b}\,\overline{\mathfrak{F}}_2(\varphi\psi) + \overline{\mathfrak{F}}_2(\varphi) & \mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_2(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\overline{\mathfrak{F}}_2(\psi) \\ \bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_3(\varphi\psi) + \mathfrak{F}_3(\varphi) & \mathfrak{b}\,\overline{\mathfrak{F}}_3(\varphi\psi) + \overline{\mathfrak{F}}_3(\varphi) & \mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_3(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\overline{\mathfrak{F}}_3(\psi) \end{vmatrix} = 0\,. \tag{35}$$

Diese ist ebenfalls ein algebraischer Ausdruck für eine Kurve, die unter dem Namen „Mittelpunktskurve" der Bewegung a gegenüber b bekannt ist.

Zur Bestimmung des Vektors $\mathfrak{a}$ kann die Determinante in (33) wie folgt umgeformt werden:

$$\mathfrak{a}^2\,\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}^2\,\bar{\mathfrak{d}}_1 + \mathfrak{a}^2\,\mathfrak{d}_2 - \bar{\mathfrak{a}}_2\,\bar{\mathfrak{d}}_2 + \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{d}_3 - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_3 + \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_4 - \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_4 = 0\,. \tag{36}$$

Hierin sind $\mathfrak{d}_1$ bis $\mathfrak{d}_4$ und die konjugiert-komplexen Größen $\bar{\mathfrak{d}}_1$ bis $\bar{\mathfrak{d}}_4$ dreistellige Determinanten, die nur von den gegebenen Winkeln φ_ν und ψ_ν abhängen:

$$\mathfrak{d}_1 = |\ \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi)\quad \mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi)\quad \mathfrak{F}_\nu(\varphi)|\,, \tag{37}$$

$$\mathfrak{d}_2 = |-\mathfrak{F}_\nu(\psi)\quad \mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi)\quad \mathfrak{F}_\nu(\varphi)|\,, \tag{38}$$

$$\mathfrak{d}_3 = |-\mathfrak{F}_\nu(\psi)\quad \mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi)\quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi)|\,, \tag{39}$$

$$\mathfrak{d}_4 = |\ \mathfrak{F}_\nu(\psi)\quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\psi)\quad \mathfrak{F}_\nu(\varphi)|\,. \tag{40}$$

Entsprechend ergibt die Umformung von (35):

$$\mathfrak{b}^2\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d}_5 - \mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{b}}^2\,\bar{\mathfrak{d}}_5 + \mathfrak{b}^2\,\mathfrak{d}_6 - \bar{\mathfrak{b}}_2\,\bar{\mathfrak{d}}_6 + \mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d}_7 - \mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{d}}_7 + \mathfrak{b}\,\mathfrak{d}_8 - \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{d}}_8 = 0\,. \tag{41}$$

Hierin lassen sich die dreistelligen Determinanten $\mathfrak{d}_5$ bis $\mathfrak{d}_8$ wie folgt darstellen:

$$\mathfrak{d}_5 = |\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi)\quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi)\quad \mathfrak{F}_\nu(\psi)|\,, \tag{42}$$

$$\mathfrak{d}_6 = |\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi)\quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi)\quad \mathfrak{F}_\nu(\psi)|\,, \tag{43}$$

$$\mathfrak{d}_7 = |\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi)\quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi)\quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\psi)|\,, \tag{44}$$

$$\mathfrak{d}_8 = |\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi)\quad \overline{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi)\quad \mathfrak{F}_\nu(\psi)|\,. \tag{45}$$

Stellt man in (36) den Vektor $\mathfrak{a}$ nach (8) dar, und setzt man nach (3) für die Vektoren $\mathfrak{d}_\nu = d_{x\nu} + i\,d_{y\nu}$, so ergibt sich nach einigen Umformungen die Gleichung unter der Bedingung, daß $a \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} a^2\,(d_{x1}\sin\alpha + d_{y1}\cos\alpha) + a\,(2\,d_{x2}\sin\cos\alpha + 2\,d_{y2}\cos^2\alpha - d_{y2} + d_{y3}) \\ + (d_{x4}\sin\alpha + d_{y4}\cos\alpha) = 0\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Für jeden Winkel α kann aus dieser Gleichung (46) die Länge a berechnet werden. Auch diese Gleichung stellt die Kreispunktkurve für die Lagen von a relativ zu b dar.

Aus (41) ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned} b^2\,(d_{x5}\sin\beta + d_{y5}\cos\beta) + b\,(2\,d_{x6}\sin\beta\,\cos\beta + 2\,d_{y6}\cos^2\beta - d_{y6} + d_{y7}) \\ + (d_{x8}\sin\beta + d_{y8}\cos\beta) = 0\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Wird für einen gewählten Winkel α aus (46) ein dazugehöriger Wert a berechnet, so kann mit Hilfe des damit bekannten Vektors $\mathfrak{a}$ aus (31) der Vektor $\mathfrak{b}$ ermittelt werden: Durch Einsetzen zweier Winkelpaare z. B. φ_1, φ_2 und ψ_1, ψ_2 lassen sich $\mathfrak{b}$ und $\bar{\mathfrak{b}}$ ermitteln. Damit erhält man nach (22) und (24) die Länge b und den Anfangswinkel β des Lenkers b.

Aus (31) läßt sich aber auch die Abhängigkeit der beiden Winkel α und β direkt darstellen. Gleichung (31) kann in folgende Form gebracht werden:

$$\bar{\mathfrak{a}}\left[\frac{\mathfrak{a}}{\bar{\mathfrak{a}}}\,\mathfrak{F}_r(\varphi)+\bar{\mathfrak{F}}_r(\varphi)\right]-\bar{\mathfrak{b}}\left[\frac{\mathfrak{b}}{\bar{\mathfrak{b}}}\,\mathfrak{F}_r(\psi)+\bar{\mathfrak{F}}_r(\psi)\right]+\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\left[\frac{\mathfrak{a}}{\bar{\mathfrak{a}}}\cdot\frac{\bar{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_r(\varphi\psi)+\bar{\mathfrak{F}}_r(\varphi\psi)\right]=0\,. \tag{48}$$

Unter Berücksichtigung von (24) erhält man hieraus die dreistellige Determinante, deren Wert null ist:

$$\begin{vmatrix} e^{i2\alpha}\,\mathfrak{F}_1(\varphi)+\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi) & e^{i2\beta}\,\mathfrak{F}_1(\psi)+\bar{\mathfrak{F}}_1(\psi) & e^{i2(\alpha-\beta)}\,\mathfrak{F}_1(\varphi\psi)+\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi)\\ e^{i2\alpha}\,\mathfrak{F}_2(\varphi)+\bar{\mathfrak{F}}_2(\varphi) & e^{i2\beta}\,\mathfrak{F}_2(\psi)+\bar{\mathfrak{F}}_2(\psi) & e^{i2(\alpha-\beta)}\,\mathfrak{F}_2(\varphi\psi)+\bar{\mathfrak{F}}_2(\varphi\psi)\\ e^{i2\alpha}\,\mathfrak{F}_3(\varphi)+\bar{\mathfrak{F}}_3(\varphi) & e^{i2\beta}\,\mathfrak{F}_3(\psi)+\bar{\mathfrak{F}}_3(\psi) & e^{i2(\alpha-\beta)}\,\mathfrak{F}_3(\varphi\psi)+\bar{\mathfrak{F}}_3(\varphi\psi)\end{vmatrix}=0\,. \tag{49}$$

Diese Gleichung (49) kann durch Umformen auf folgende Form gebracht werden:

$$e^{i2\alpha}\,\mathfrak{d}_9+e^{-i2\alpha}\,\bar{\mathfrak{d}}_9+e^{i2\beta}\,\mathfrak{d}_{10}+e^{-i2\beta}\,\bar{\mathfrak{d}}_{10}+e^{i2\alpha}\,e^{-i2\beta}\,\mathfrak{d}_{11}+e^{-i2\alpha}\,e^{i2\beta}\,\bar{\mathfrak{d}}_{11}+\mathfrak{d}_{12}+\bar{\mathfrak{d}}_{12}=0\,. \tag{50}$$

Hierin bedeuten

$$\mathfrak{d}_9=\left|\mathfrak{F}_r(\varphi)\quad\mathfrak{F}_r(\psi)\quad\mathfrak{F}_r(\varphi\psi)\right|, \tag{51}$$

$$\mathfrak{d}_{10}=\left|\mathfrak{F}_r(\varphi)\quad\mathfrak{F}_r(\psi)\quad\bar{\mathfrak{F}}_r(\varphi\psi)\right|, \tag{52}$$

$$\mathfrak{d}_{11}=\left|\mathfrak{F}_r(\varphi)\quad\bar{\mathfrak{F}}_r(\psi)\quad\mathfrak{F}_r(\varphi\psi)\right|, \tag{53}$$

$$\mathfrak{d}_{12}=\left|\mathfrak{F}_r(\varphi)\quad\bar{\mathfrak{F}}_r(\psi)\quad\bar{\mathfrak{F}}_r(\varphi\psi)\right|. \tag{54}$$

Soll (50) dazu benutzt werden, den Winkel β für einen bekannten Winkel α zu berechnen, so wird sie zweckmäßig wie folgt umgeformt: Werden die komplexen Größen nach (3), (8) und (20) eingesetzt, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned}&\cos 2\beta\,(d_{x10}+d_{x11}\cos 2\alpha-d_{y11}\sin 2\alpha)-\sin 2\beta\,(d_{y10}-d_{x11}\sin 2\alpha-d_{y11}\cos 2\alpha)\\&\quad+d_{x12}+d_{x9}\cos 2\alpha-d_{x9}\sin 2\alpha=0\,.\end{aligned} \tag{55}$$

Hierfür wird abgekürzt geschrieben

$$D_1\cos 2\beta-D_2\sin 2\beta+D_3=0\,, \tag{56}$$

worin D_1, D_2 und D_3 Funktionen von α sind. Setzt man

$$D_1=S\sin\sigma\quad\text{und}\quad D_2=S\cos\sigma\,, \tag{57}\ \tag{58}$$

so erhält man

$$\beta=\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{D_3}{S}+\sigma\right). \tag{59}$$

Hierin ist

$$S=\sqrt{D_1^2+D_2^2}\,, \tag{60}$$

und σ erhält man aus der Beziehung

$$\operatorname{tg}\sigma=\frac{D_1}{D_2}\,. \tag{61}$$

Erstes Zahlenbeispiel. Mit einem Gelenkviereck soll in vier Punkten die Funktion

$$y^2=2\,p\,x\quad\text{oder}\quad y=\sqrt{2\,p\,x} \tag{62}$$

verwirklicht werden. Die Gleichung stellt bekanntlich eine Parabel dar (Abb. 11), deren Symmetrieachse die Abszissenachse ist, wobei p der Parameter der Parabel ist, der den Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkt bestimmt. Die vier zu verwirklichenden Punkte sollen durch folgende Abszissen bestimmt sein: $p/2, p, \frac{3\,p}{2}, 2\,p$. Nach (62) haben die dazugehörigen Ordinaten dann folgende Größen: $p, p\sqrt{2}, p\sqrt{3}, 2\,p$. Nach (1) und (2) ist

$$x=m_\varphi\,\varphi+x_0\quad\text{und}\quad y=m_\psi\,\psi+y_0\,.$$

Werden die Koordinatenachsen für φ und ψ durch den Punkt $x_0 = p/2$ und $y_0 = p$ gelegt, so erhält man aus (62)

$$m_\psi \psi + p = \sqrt{2\,p\left(m_\varphi \varphi + \frac{p}{2}\right)}. \tag{63}$$

Setzt man

$$p = m_\varphi \frac{\pi}{6},$$

so erhält (63) folgende Form:

$$\psi = c \sqrt{\frac{\pi}{3}\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right)} - \frac{\pi}{6}. \tag{64}$$

Hierin ist $c = m_\varphi/m_\psi$. Nach (64) ergeben sich für die gegebenen Punkte 1, 2 und 3 (Abb. 11) folgende Winkelzuordnungen, wenn $c = 1$ gesetzt wird:

Punkt	$\widehat{\varphi_\nu}$	φ_ν^0	$\widehat{\psi_\nu}$	ψ_ν^0
1	$\frac{\pi}{12}$	15	$\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1)$	12,4263
2	$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{\pi}{6}(\sqrt{3}-1)$	21,9615
3	$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\pi}{6}$	30

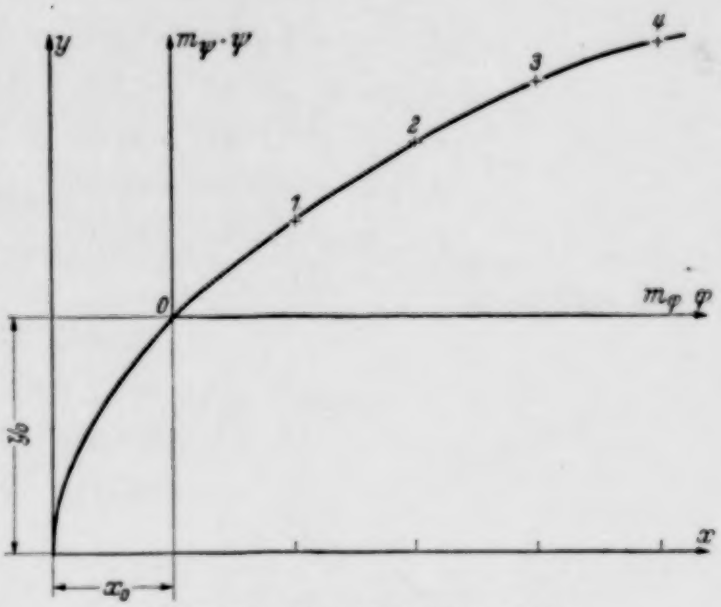


Abb. 11. Darstellung der Funktion $y^2 = 2\,p\,x$ bzw. $\psi = \sqrt{\frac{\pi}{3}\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right)} - \frac{\pi}{6}$.

Zur Berechnung der $\mathfrak{F}$-Größen (30) und (31) werden die Sinus- und Cosinusfunktionen der Winkel φ_1 bis φ_3 und ψ_1 bis ψ_3 in folgenden Kombinationen benötigt:

Punkt	$\cos\varphi_\nu$	$\sin\varphi_\nu$	$\cos\psi_\nu$	$\sin\psi_\nu$	$\cos(\varphi_\nu - \psi_\nu)$	$\sin(\varphi_\nu - \psi_\nu)$
1	0,9659258	0,2588190	0,9765732	0,2151855	0,9989913	0,0449025
2	0,8660254	0,5	0,9274352	0,3739838	0,9901743	0,1398381
3	0,7071068	0,7071068	0,8660254	0,5	0,9659258	0,2588190

Daraus ergeben sich nach (9) für die $\mathfrak{F}$-Größen folgende Werte:

Punkt	$\mathfrak{F}_\nu(\varphi)$	$\mathfrak{F}_\nu(\psi)$	$\mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi)$
1	$-0{,}0340742 + i\,0{,}2588190$	$-0{,}0234268 + i\,0{,}2151855$	$-0{,}0010087 + i\,0{,}0449025$
2	$-0{,}1339746 + i\,0{,}5$	$-0{,}0725648 + i\,0{,}3739838$	$-0{,}0098257 + i\,01398381$
3	$-0{,}2928932 + i\,0{,}7071068$	$-0{,}1339746 + i\,0{,}5$	$-0{,}0340742 + i\,0{,}2588190$

Zur Berechnung der Determinanten $\mathfrak{d}_1$ bis $\mathfrak{d}_{12}$ mit ihren komplexen $\mathfrak{F}$-Gliedern werden diese zweckmäßig in Determinanten mit reellen Gliedern umgewandelt nach folgender Beziehung:

$$\mathfrak{d} = d_x + i\,d_y = |a_{x\nu} + i\,a_{y\nu} \quad b_{x\nu} + i\,b_{y\nu} \quad c_{x\nu} + i\,c_{y\nu}|, \tag{64/1}$$

$$d_x = |a_{x\nu}\,b_{x\nu}\,c_{x\nu}| - |a_{x\nu}\,b_{y\nu}\,c_{y\nu}| - |a_{y\nu}\,b_{x\nu}\,c_{y\nu}| - |a_{y\nu}\,b_{y\nu}\,c_{x\nu}|, \tag{64/2}$$

$$d_y = |a_{y\nu}\,b_{x\nu}\,c_{x\nu}| + |a_{x\nu}\,b_{y\nu}\,c_{x\nu}| + |a_{x\nu}\,b_{x\nu}\,c_{y\nu}| - |a_{y\nu}\,b_{y\nu}\,c_{y\nu}|. \tag{64/3}$$

Sind die Glieder einer Spalte konjugiert-komplex zu den Gliedern einer zweiten Spalte, so vereinfachen sich die Beziehungen wie folgt:

$$\mathfrak{d} = d_x + i\,d_y = |a_{x\nu} + i\,a_{y\nu} \quad a_{x\nu} - i\,a_{y\nu} \quad b_{x\nu} + i\,b_{y\nu}|, \tag{64/4}$$

$$d_x = 2\,|a_{x\nu}\,a_{y\nu}\,b_{x\nu}|, \tag{64/5}$$

$$d_y = -2\,|a_{x\nu}\,a_{y\nu}\,b_{x\nu}|. \tag{64/6}$$

Für die Determinanten $\mathfrak{d}_1$ bis $\mathfrak{d}_4$ nach (37) bis (40) ergibt sich danach

$$\mathfrak{d}_1 = d_{x1} + i\, d_{y1} = -2\, d_{x1a} + i\, 2\, d_{y1a}, \tag{64/7}$$

$$\mathfrak{d}_2 = d_{x2} + i\, d_{y2} = (d_{x2a} - d_{x2b} - d_{x2c} - d_{x2d}) + i\,(d_{y2a} + d_{y2b} + d_{y2c} - d_{y2d}), \tag{64/8}$$

$$\mathfrak{d}_3 = d_{x3} + i\, d_{y3} = (d_{x2a} + d_{x2b} + d_{x2c} - d_{x2d}) + i\,(d_{y2a} + d_{y2b} - d_{y2c} + d_{y2d}), \tag{64/9}$$

$$\mathfrak{d}_4 = d_{x4} + i\, d_{y4} = 2\, d_{x4a} - i\, 2\, d_{y4a}. \tag{64/10}$$

Aus der Zahlenrechnung erhält man für die Determinanten folgende Werte:

$$d_{x1a} = +\,152{,}8041 \cdot 10^{-6}, \qquad d_{y1a} = +\,6{,}390834 \cdot 10^{-6},$$
$$d_{x2a} = -\,3{,}462640 \cdot 10^{-6}, \qquad d_{y2a} = -\,0{,}3765\ \ 10^{-6},$$
$$d_{x2b} = -\,158{,}997\ \cdot 10^{-6}, \qquad d_{y2b} = +\,139{,}170\ \cdot 10^{-6},$$
$$d_{x2c} = +\,0{,}7132\ \cdot 10^{-6}, \qquad d_{y2c} = -\,78{,}6987\ \cdot 10^{-6},$$
$$d_{x2d} = +\,357{,}039\ \cdot 10^{-6}, \qquad d_{y2d} = +\,262{,}310\ \cdot 10^{-6},$$
$$d_{x4a} = -\,134{,}355\ \cdot 10^{-6}, \qquad d_{y4a} = -\,185{,}251\ \cdot 10^{-6}.$$

Damit ergibt sich

$$\mathfrak{d}_1 = (-305{,}608 + i\ 12{,}7817) \cdot 10^{-6},$$
$$\mathfrak{d}_2 = (-202{,}218 - i\ 202{,}216) \cdot 10^{-6},$$
$$\mathfrak{d}_3 = (-518{,}786 + i\ 479{,}802) \cdot 10^{-6},$$
$$\mathfrak{d}_4 = (-268{,}710 + i\ 370{,}502) \cdot 10^{-6}.$$

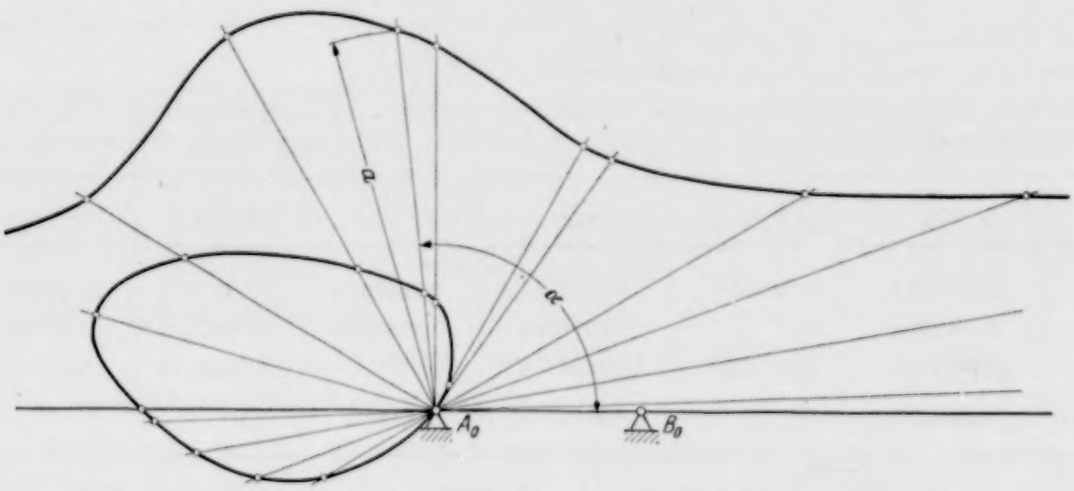


Abb. 12. Darstellung der Funktionen $a = f(\alpha)$ für das erste Zahlenbeispiel (Mittelpunktkurve).

Zur Darstellung der Funktion $a = f(\alpha)$ nach (46) ergibt die Rechnung folgende Werte:

α	$d_{x1}\sin\alpha + d_{y1}\cos\alpha$	$d_{x2}\sin 2\alpha + d_{y2}\cos 2\alpha + d_{y3}$	$d_{x4}\sin\alpha + d_{y4}\cos\alpha$	a_1	a_2
0	+ 12,782	+277,586	+370,502	−1,4287	−20,288
30	−141,734	+203,568	+186,509	−0,63547	+ 2,07174
60	−258,273	+405,784	− 47,459	+0,12726	+ 1,44388
90	−305,608	+682,018	−268,710	+0,51100	+ 1,72068
120	−271,055	+756,036	−417,961	+0,75981	+ 2,02942
150	−163,874	+553,820	−455,219	+1,41143	+ 1,96812
180	− 12,782	+277,586	−370,502	+1,4287	+20,288

Für den Verlauf der Kurve $a = f(\alpha)$ (Abb. 12) sind noch folgende Größen besonders kennzeichnend: Für $\alpha = 2{,}40°$ wird $d_{x1}\sin\alpha + d_{y1}\cos\alpha = 0$. Hierfür ergibt sich dann $a_1 = -1{,}3732$ und $a_2 = \infty$. Für $\alpha = 54{,}04°$ wird $d_{x4}\sin\alpha + d_{y4}\cos\alpha = 0$. Damit wird $a_1 = 0$ und $a_2 = +\,1{,}46064$. Für $\alpha = 96°$ ergibt die Rechnung $a_1 = +\,0{,}55501$ und $a_2 = 1{,}80268$. Der Wert für a_2 entspricht dem im späteren zweiten Beispiel errechneten für vier gegebene Winkelzuordnungen.

Als Beispiel für $\alpha = 120°$ und $a = 0{,}75981$ ist aus (32) durch Einsetzen der Winkel φ_1 und ψ_1 bzw. φ_1 und ψ_2 der Vektor $\mathfrak{b}$ berechnet worden: $\mathfrak{b} = -5{,}38108 + i\ 0{,}615569$. Mit Hilfe von (6) und (7) ergeben sich dann $b = 5{,}41620$ und $\beta = 173{,}47°$. In Abb. 13 ist das Kurbelgetriebe mit diesen Größen und die Funktion $\psi_k = f(\varphi_k)$ dieses Getriebes im Vergleich zu der gegebenen Parabelfunktion dargestellt.

b) Zuordnung von vier Winkelpaaren. Wie gezeigt wurde, kann bei der Vorgabe von drei Winkelpaaren φ_1 bis φ_3 und ψ_1 bis ψ_3 eine der vier Größen a, α, b oder β frei gewählt werden. Wird noch eine viertes Winkelpaar φ_4 und ψ_4 vorgegeben, so sind die Größen zur Bestimmung

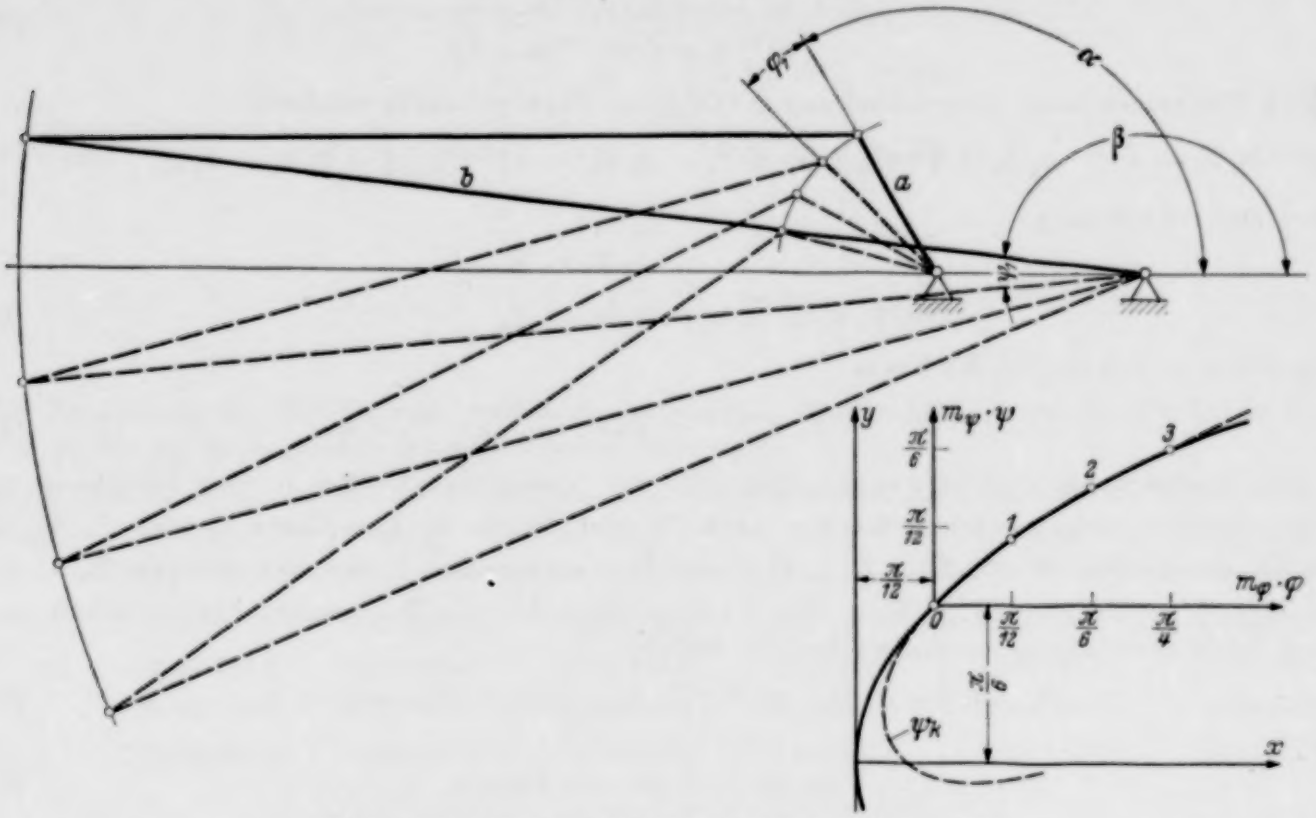


Abb. 13. Gelenkviereck nach dem ersten Zahlenbeispiel für $\alpha = 120°$.

des Gelenkviereckes eindeutig bestimmt. Gleichungen für ihre Bestimmung können aus (31) entwickelt werden. (Hier wird der Entwicklungsgang etwas anders durchgeführt als in dem Aufsatz in Fußnote 6 von S. 189. Zu diesem Zweck wird der Gleichung (31) folgende Form gegeben:

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_\nu(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\psi) - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_\nu(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi)\,. \tag{65}$$

Setzt man für $\nu = 1$ bis 4 ein, so ergeben sich vier homologe Gleichungen, die wie folgt umgeformt werden können:

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_1 + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_2\,, \tag{66}$$

$$\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_2 + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_1\,, \tag{67}$$

$$\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_3 + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{d}_4\,, \tag{68}$$

$$\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_4 + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_3\,. \tag{69}$$

In diesen vier Gleichungen sind die Größen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{d}_4$ und ihre konjugiert-komplexen Größen vierstellige Determinanten, die aus den Koeffizienten $\mathfrak{F}_\nu(\varphi)$, $\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi)$, $\mathfrak{F}_\nu(\psi)$ usw. gebildet werden

$$\mathfrak{d} = |\mathfrak{F}_\nu(\psi) \quad \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\psi) \quad \mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi) \quad \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi)|\,, \tag{70}$$

$$\mathfrak{d}_1 = |\mathfrak{F}_\nu(\varphi) \quad \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\psi) \quad \mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi) \quad \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi)|\,, \tag{71}$$

$$\mathfrak{d}_2 = |\mathfrak{F}_\nu(\psi) \quad \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi) \quad (\mathfrak{F}_\nu\varphi\psi) \quad \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi)|\,, \tag{72}$$

$$\mathfrak{d}_3 = |\mathfrak{F}_\nu(\psi) \quad \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\psi) \quad \mathfrak{F}_\nu(\varphi) \quad -\bar{\mathfrak{F}}_\nu(\varphi\psi)|\,, \tag{73}$$

$$\mathfrak{d}_4 = |\mathfrak{F}_\nu(\psi) \quad \bar{\mathfrak{F}}_\nu(\psi) \quad -\mathfrak{F}_\nu(\varphi\psi) \quad \mathfrak{F}_\nu(\varphi)\ |\,. \tag{74}$$

Wird (68) durch (67) und (69) durch (66) dividiert, so ergibt sich

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_3 + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_4}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_2 + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_1}, \tag{75}$$

$$\bar{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_4 + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_3}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_1 + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_2}. \tag{76}$$

Wird (75) durch (76) dividiert, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (24)

$$e^{i2\alpha} = \frac{(e^{i2\alpha}\,\mathfrak{d}_3 + \bar{\mathfrak{d}}_4)\,(e^{i2\alpha}\,\mathfrak{d}_1 + \bar{\mathfrak{d}}_2)}{(e^{i2\alpha}\,\mathfrak{d}_2 + \bar{\mathfrak{d}}_1)\,(e^{i2\alpha}\,\mathfrak{d}_4 + \bar{\mathfrak{d}}_3)}. \tag{77}$$

Durch Umformen kann diese Gleichung auf folgende Form gebracht werden:

$$e^{i3\alpha}\,\mathfrak{d}_2\,\mathfrak{d}_4 - e^{-i3\alpha}\,\bar{\mathfrak{d}}_2\,\bar{\mathfrak{d}}_4 + e^{i\alpha}\,(\mathfrak{d}_2\,\bar{\mathfrak{d}}_3 + \bar{\mathfrak{d}}_1\,\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{d}_1\,\mathfrak{d}_3) - e^{-i\alpha}\,(\bar{\mathfrak{d}}_2\,\mathfrak{d}_3 + \mathfrak{d}_1\,\bar{\mathfrak{d}}_4 - \bar{\mathfrak{d}}_1\,\bar{\mathfrak{d}}_3) = 0. \tag{78}$$

Wird zur Abkürzung

$$\mathfrak{d}_2\,\mathfrak{d}_4 = \mathfrak{D}_a, \tag{79}$$

$$\mathfrak{d}_2\,\bar{\mathfrak{d}}_3 + \bar{\mathfrak{d}}_1\,\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{d}_1\,\mathfrak{d}_3 = \mathfrak{D}_b \tag{80}$$

eingeführt, so erhält (78) die Form

$$\mathfrak{D}_a \cdot e^{i3\alpha} - \bar{\mathfrak{D}}_a\,e^{-i3\alpha} + \mathfrak{D}_b\,e^{i\alpha} - \bar{\mathfrak{D}}_b\,e^{-i\alpha} = 0. \tag{81}$$

Für Auswertungen ist es zweckmäßig, (81) mit komplexen Größen in eine Gleichung mit reellen Größen umzuwandeln. Werden nach (3) und (20) für die komplexen Größen $\mathfrak{D}_a$, $\bar{\mathfrak{D}}_a$, $\mathfrak{D}_b$ und $\bar{\mathfrak{D}}_b$ die reellen Werte D_{xa}, D_{ya}, D_{xb} und D_{xb} entsprechend den Beziehungen $\mathfrak{D}_a = D_{xa} + i\,D_{ya}$, $\bar{\mathfrak{D}}_a = D_{xa} - i\,D_{ya}$, $\mathfrak{D}_b = D_{xb} + i\,D_{yb}$, $\bar{\mathfrak{D}}_b = D_{xb} - i\,\mathfrak{D}_{yb}$ eingeführt, so erhält man unter Berücksichtigung der *Euler*schen Formel (9):

$$D_{xa}\sin 3\alpha + D_{ya}\cos 3\alpha + D_{xb}\sin\alpha + D_{yb}\cos\alpha = 0. \tag{82}$$

Wird

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \tag{83}$$

und

$$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha \tag{84}$$

eingeführt, so erhält man nach einigen weiteren Umformungen die Gleichung

$$(D_{xb} - D_{xa})\,\mathrm{tg}^3\alpha + (D_{yb} - 3\,D_{ya})\,\mathrm{tg}^2\alpha + (D_{xb} + 3\,D_{xa})\,\mathrm{tg}\,\alpha + (D_{yb} + D_{ya}) = 0. \tag{85}$$

Aus dieser kubischen Gleichung für $\mathrm{tg}\,\alpha$ mit reellen Koeffizienten kann α ermittelt werden. Je nachdem ob diese Gleichung eine reelle Lösung oder drei hat, gibt es einen Wert für α oder drei Werte.

Aus (76) ergibt sich für

$$a = e^{i\alpha}\,\frac{e^{i2\alpha}\cdot\mathfrak{d}_4 + \bar{\mathfrak{d}}_3}{e^{2i\alpha}\,\mathfrak{d}_1 + \bar{\mathfrak{d}}_2}. \tag{86}$$

Der Vektor b kann dann nach Größe und Richtung aus (66) ermittelt werden

$$b = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_1 + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{d}}_2}{\mathfrak{d}} = b_x + i\,b_y, \tag{87}$$

wobei sich die Länge b und der Ausgangswinkel β nach (6) und (7) ergeben. Ausgehend von (31) läßt sich mit entsprechenden Formeln der Lösungsgang auch so entwickeln, daß sich zunächst β und b und dann α und a ergibt.

Zweites Zahlenbeispiel. Gegeben ist wie im ersten Zahlenbeispiel die Gleichung

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi}{3}\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right)} - \frac{\pi}{6} \qquad \text{[siehe (64)]},$$

der die Gleichung

$$y = \sqrt{2\,p\,x}$$

mit $p = m_\varphi \pi/6$ zugrunde liegt. Wird zu den drei Winkelpaaren des ersten Beispiels noch ein viertes

$$\varphi_4 = \frac{\pi}{3} \quad \text{und} \quad \psi_4 = \frac{\pi}{6}(\sqrt{5} - 1)$$

(Punkt 4 in Abb. 11) hinzugefügt, so ergeben sich folgende Zuordnungen:

Punkt	$\widehat{\varphi_\nu}$	φ_ν^0	$\widehat{\psi_\nu}$	ψ_ν^0
1	$\frac{\pi}{12}$	15	$\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1)$	12,4263
2	$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{\pi}{6}(\sqrt{3}-1)$	21,9615
3	$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\pi}{6}$	30
4	$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\pi}{6}(\sqrt{5}-1)$	37,0821

Zur Ermittlung der $\mathfrak{F}$-Vektoren werden die Sinus- und Cosinusfunktionen der Winkel φ_1 bis φ_4 und ψ_1 bis ψ_4 in folgenden Kombinationen benötigt:

Punkt	$\cos\varphi_\nu$	$\sin\varphi_\nu$	$\cos\psi_\nu$	$\sin\psi_\nu$	$\cos(\varphi_\nu - \psi_\nu)$	$\sin(\varphi_\nu - \psi_\nu)$
1	0,9659258	0,2588190	0,9765732	0,2151855	0,9989913	0,0449025
2	0,8660254	0,5000000	0,9274352	0,3739838	0,9901743	0,1398381
3	0,7071068	0,7071068	0,8660254	0,5000000	0,9659258	0,2588190
4	0,5000000	0,8660254	0,7977730	0,6029580	0,9210634	0,3894127

Daraus ergeben sich für die $\mathfrak{F}$-Vektoren folgende Werte:

Punkt	$\mathfrak{F}_\nu(\varphi)$	$\mathfrak{F}_\nu(\psi)$	$\mathfrak{F}_\nu'(\varphi\psi)$
1	$-0{,}0340742 + i\,0{,}2588190$	$-0{,}0234268 + i\,0{,}2151855$	$-0{,}0010087 + i\,0{,}0449025$
2	$-0{,}1339746 + i\,0{,}5000000$	$-0{,}0725648 + i\,0{,}3739838$	$-0{,}0098257 + i\,0{,}1398381$
2	$-0{,}2928932 + i\,0{,}7071068$	$-0{,}1339746 + i\,0{,}5000000$	$-0{,}0340742 + i\,0{,}2588190$
4	$-0{,}5000000 + i\,0{,}8660254$	$-0{,}2022270 + i\,0{,}6029580$	$-0{,}0789366 + i\,0{,}3894127$

Die Determinanten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ und $\mathfrak{d}_4$ mit den komplexen $\mathfrak{F}$-Gliedern lassen sich zwecks ihrer Berechnung in Determinanten mit reellen Gliedern umformen. Sind die Glieder einer Spalte konjugiert-komplex zu den Gliedern einer zweiten Spalte, so gelten folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{d} = d_x + i\,d_y = |a_{x\nu} + i\,a_{y\nu} \quad a_{x\nu} - i\,a_{y\nu} \quad b_{x\nu} + b_{y\nu} \quad c_{x\nu} + c_{y\nu}|\,, \tag{88}$$

$$d_x = 2\,|a_{x\nu}\ a_{y\nu}\ b_{x\nu}\ c_{y\nu}| + 2\,|a_{x\nu}\ a_{y\nu}\ b_{y\nu}\ c_{x\nu}| = 2\,d_{xa} + 2\,d_{xb}\,, \tag{89}$$

$$d_y = 2\,|a_{x\nu}\ a_{y\nu}\ b_{y\nu}\ c_{y\nu}| - 2\,|a_{x\nu}\ a_{y\nu}\ b_{x\nu}\ c_{x\nu}| = 2\,d_{ya} - 2\,d_{yb}\,. \tag{90}$$

Sind die Glieder zweier Spalten konjugiert-komplex zu den Gliedern der beiden anderen Spalten, so gilt

$$\mathfrak{d} = |a_{x\nu} + i\,a_{y\nu} \quad a_{x\nu} - a_{y\nu} \quad b_{x\nu} + i\,b_{y\nu} \quad b_{x\nu} - i\,b_{y\nu}| = d_x + i\,d_y\,, \tag{91}$$

$$d_x = -4\,|a_{x\nu} \quad a_{y\nu} \quad b_{x\nu} \quad b_{y\nu}| = -4\,d_{xa}\,, \tag{92}$$

$$d_y = 0\,. \tag{93}$$

Mit Hilfe von (88) bis (93) erhält man

$$\mathfrak{d} = d_x = -4\,d_{xa}\,, \tag{94}$$

$$\mathfrak{d}_1 = d_{x1} + i\,d_{y1} = (2\,d_{xa1} + 2\,d_{xb1}) + i\,(2\,d_{ya1} - 2\,d_{yb1})\,, \tag{95}$$

$$\mathfrak{d}_2 = d_{x2} + i\,d_{y2} = (2\,d_{xa1} - 2\,d_{xb1}) + i\,(2\,d_{ya1} + 2\,d_{yb1})\,, \tag{96}$$

$$\mathfrak{d}_3 = d_{x3} + i\,d_{y3} = (2\,d_{xa3} + 2\,d_{xb3}) + i\,(2\,d_{ya3} - 2\,d_{yb3})\,, \tag{97}$$

$$\mathfrak{d}_4 = d_{x4} + i\,d_{y4} = (-2\,d_{xa3} + 2\,d_{xb3}) + i\,(2\,d_{ya3} + 2\,d_{yb3})\,. \tag{98}$$

Die Zahlenrechnung ergibt für die Determinanten folgende Werte:

$$2\,d_{xa1} = +\,3{,}442\,918\,2 \cdot 10^{-6}\,,$$
$$2\,d_{xb1} = -\,0{,}310\,067\,7 \cdot 10^{-6}\,,$$
$$2\,d_{ya1} = -\,0{,}635\,507\,3 \cdot 10^{-6}\,,$$
$$2\,d_{yb1} = -\,0{,}008\,894\,5 \cdot 10^{-6}\,,$$
$$2\,d_{xa3} = +\,0{,}649\,933\,0 \cdot 10^{-6}\,,$$
$$2\,d_{xb3} = +\,0{,}699\,767\,7 \cdot 10^{-6}\,,$$
$$2\,d_{ya3} = +\,0{,}535\,234\,7 \cdot 10^{-6}\,,$$
$$2\,d_{yb3} = -\,2{,}059\,120\,2 \cdot 10^{-6}$$

und damit

$$\mathfrak{d} = -\,0{,}621\,892 \cdot 10^{-6}\,,$$
$$\mathfrak{d}_1 = (3{,}132\,850\,5 - i\;0{,}626\,612\,8) \cdot 10^{-6}\,,$$
$$\mathfrak{d}_2 = (3{,}752\,985\,9 - i\;0{,}644\,401\,8) \cdot 10^{-6}\,,$$
$$\mathfrak{d}_3 = (1{,}349\,700\,7 + i\;2{,}594\,354\,9) \cdot 10^{-6}\,,$$
$$\mathfrak{d}_4 = (0{,}049\,834\,7 - i\;1{,}523\,885\,5) \cdot 10^{-6}\,.$$

Nach (79) und (80) ergeben sich für die Größen $\mathfrak{D}_a$ und $\mathfrak{D}_b$ folgende Werte:

$$\mathfrak{D}_a = D_{xa} + i\,D_{ya} = -\,0{,}794\,965\,7 - i\;\;5{,}751\,234\,4\,,$$
$$\mathfrak{D}_b = D_{xb} + i\,D_{yb} = -\,1{,}349\,454\,9 - i\;22{,}631\,191\,7\,.$$

Damit erhält (85), die kubische Gleichung für $\operatorname{tg}\alpha$, folgende Form:

$$\operatorname{tg}^3\alpha + 9{,}698\,094\,\operatorname{tg}^2\alpha + 6{,}734\,760\,\operatorname{tg}\alpha + 51{,}186\,616 = 0\,.$$

Die Auswertung dieser Gleichung, die nach dem *Horner*schen Schema vorgenommen werden kann, führt zu folgender Lösung:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\,9{,}554 \quad \text{und damit} \quad \alpha = 180^\circ - 84^\circ\,.$$

Die beiden weiteren Lösungen für $\operatorname{tg}\alpha$ sind komplex und deshalb für diesen Zweck nicht brauchbar.

Setzt man die errechneten Werte in (86) zur Bestimmung des Vektors $\mathfrak{a}$ ein, so erhält man

$$\mathfrak{a} = \frac{-\,0{,}7334 - i\;1{,}294}{-\,0{,}673 + i\;0{,}4794}\,,$$

$$\mathfrak{a} = -\,0{,}1856 + i\;1{,}791\,.$$

Größe und Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$ ergeben sich daraus nach (6) und (7) zu

$$a = 1{,}801\,,\quad \alpha = 96^\circ\,.$$

Nach (87) ergibt sich dann

$$b = \frac{+\,0{,}9851 - i\;1{,}1138}{-\,0{,}6219}\,,$$

$$b = -1{,}584 + i\;1{,}791\,.$$

Die Größe und die Richtung des Vektors $\mathfrak{b}$ ist dann

$$b = 2{,}391\,,\quad \beta = 131{,}5^\circ\,.$$

In Abb. 14 ist das Getriebe mit den errechneten Abmessungen dargestellt.

4. Anpassung der Ableitungen von Winkeln am Kurbelgetriebe mit vier Drehgelenken (Gelenkviereck). Von einer Funktion $y = f(x)$ (Abb. 3) sollen an einer Stelle x_0, y_0 die Ableitungen erster und höherer Ordnung gegeben sein. Es lassen sich dann Kurbelgetriebe finden, die in ihrer Winkelabhängigkeit $\psi = f(\varphi)$ die Funktion an dieser Stelle mit ihren Ableitungen erfüllen. Paßt man die Funktion $\psi = f(\varphi)$ der Funktion $y = f(x)$ bis zur Ableitung dritter Ordnung an, so kann eine Größe des viergliedrigen Kurbelgetriebes noch frei gewählt werden. Bei der Anpassung bis zur Ableitung vierter Ordnung gibt es entweder drei Lösungen oder eine; eine freie Wahl ist nicht mehr möglich. Die Darstellung in der *Gauß*schen Zahlenebene führt auch bei diesem Problem zu handlichen Formulierungen.

Wird (31) nach $d\varphi$ viermal abgeleitet und die Ableitungen der $\mathfrak{F}$-Vektoren mit Strichen gekennzeichnet, also

$$\frac{d\,\mathfrak{F}(\varphi)}{d\,\varphi} = \mathfrak{F}'(\varphi)\,, \quad \frac{d^2\,\mathfrak{F}(\varphi)}{d\,\varphi^2} = \mathfrak{F}''(\varphi) \text{ usw.} \tag{99}$$

gesetzt, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}'(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}'(\varphi) - \mathfrak{b}\,\mathfrak{F}'(\psi) - \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}'(\psi) + \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}'(\varphi\psi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}'(\varphi\psi) = 0\,, \tag{100}$$

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}''(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}''(\varphi) - \mathfrak{b}\,\mathfrak{F}''(\psi) - \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}''(\psi) + \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}''(\varphi\psi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}''(\varphi\psi) = 0\,, \tag{101}$$

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}'''(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}'''(\varphi) - \mathfrak{b}\,\mathfrak{F}'''(\psi) - \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}'''(\psi) + \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}'''(\varphi\psi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}'''(\varphi\psi) = 0\,, \tag{102}$$

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}''''(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}''''(\varphi) - \mathfrak{b}\,\mathfrak{F}''''(\psi) - \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}''''(\psi) + \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}''''(\varphi\psi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}''''(\varphi\psi) = 0\,. \tag{103}$$

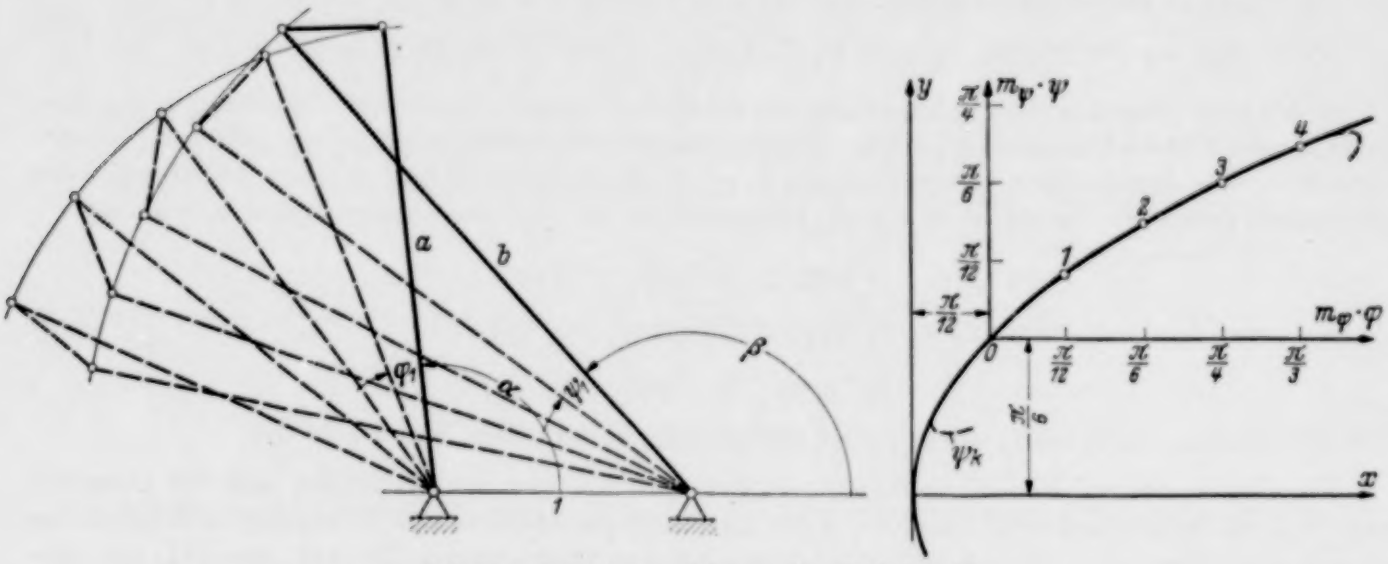


Abb. 14. Gelenkviereck nach dem zweiten Zahlenbeispiel.

Leitet man die einzelnen $\mathfrak{F}$-Größen ab, so erhält man folgende Beziehungen: Aus

$$\mathfrak{F}(\varphi) = e^{i\varphi} - 1 \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{F}}(\varphi) = e^{-i\varphi} - 1 \qquad \text{[siehe (30) und (31)]}$$

ergibt sich

$$\mathfrak{F}'(\varphi) = +\,i \cdot e^{i\varphi}\,, \qquad \bar{\mathfrak{F}}'(\varphi) = -\,i\,e^{-i\varphi}\,, \tag{104}$$

$$\mathfrak{F}''(\varphi) = -\,e^{i\varphi}\,, \qquad \bar{\mathfrak{F}}''(\varphi) = -\,e^{-i\varphi}\,, \tag{105}$$

$$\mathfrak{F}'''(\varphi) = -\,i\,e^{i\varphi}\,, \qquad \bar{\mathfrak{F}}'''(\varphi) = +\,i\,e^{-i\varphi}\,, \tag{106}$$

$$\mathfrak{F}''''(\varphi) = +\,e_{i\varphi}\,, \qquad \bar{\mathfrak{F}}''''(\varphi) = +\,e^{-i\varphi}\,, \tag{107}$$

Setzt man $\frac{d\,\psi}{d\,\varphi} = \psi'$, $\frac{d^2\,\psi}{d\,\varphi^2} = \psi''$ usw., so ergibt sich aus

$$\mathfrak{F}(\psi) = e^{i\psi} - 1 \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{F}}(\psi) = e^{-i\psi} - 1$$

durch Ableitung

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}'(\psi) &= e^{i\psi}\,i\,\psi'\,, \\ \bar{\mathfrak{F}}'(\psi) &= e^{-i\psi}\,(-\,i\,\psi')\,, \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}''(\psi) &= e^{i\psi}(-\psi'^2 + i\,\psi''),\\ \overline{\mathfrak{F}}''(\psi) &= e^{-i\psi}(-\psi'^2 - i\,\psi'')\end{aligned}\right| \tag{109}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}'''(\psi) &= e^{i\psi}(-3\,\psi'\,\psi'' - i\,\psi'^3 + i\,\psi'''),\\ \overline{\mathfrak{F}}'''(\psi) &= e^{-i\psi}(-3\,\psi'\,\psi'' + i\,\psi'^3 - i\,\psi''')\end{aligned}\right| \tag{110}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}''''(\psi) &= e^{i\psi}(\psi'^4 - 3\,\psi''^2 - 4\,\psi'\,\psi''' - 6\,i\,\psi'^2\,\psi'' + i\,\psi''''),\\ \overline{\mathfrak{F}}''''(\psi) &= e^{-i\psi}(\psi'^4 - 3\,\psi''^2 - 4\,\psi'\,\psi''' + 6\,i\,\psi'^2\,\psi'' - i\,\psi'''')\end{aligned}\right| \tag{111}$$

Aus

$$\mathfrak{F}(\varphi\psi) = e^{i(\varphi-\psi)} - 1 \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{F}}(\varphi\psi) = e^{-i(\varphi-\psi)} - 1$$

erhält man durch Ableitung

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}'(\varphi\psi) &= e^{i(\varphi-\psi)}\,i\,(1-\psi'),\\ \overline{\mathfrak{F}}'(\varphi\psi) &= e^{-i(\varphi-\psi)}[-i\,(1-\psi')]\end{aligned}\right| \tag{112}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}''(\varphi\psi) &= e^{i(\varphi-\psi)}[-(1-\psi')^2 - i\,\psi''],\\ \overline{\mathfrak{F}}''(\varphi\psi) &= e^{-i(\varphi-\psi)}[-(1-\psi')^2 + i\,\psi'']\end{aligned}\right| \tag{113}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}'''(\varphi\psi) &= e^{i(\varphi-\psi)}[3\,\psi''(1-\psi') - i\,(1-\psi')^3 - i\,\psi'''],\\ \overline{\mathfrak{F}}'''(\varphi\psi) &= e^{-i(\varphi-\psi)}[3\,\psi''(1-\psi') + i\,(1-\psi')^3 + i\,\psi''']\end{aligned}\right| \tag{114}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}''''(\varphi\psi) &= e^{i(\varphi-\psi)}[(1-\psi')^4 + 4\,\psi'''(1-\psi') - 3\,\psi''^2 + 6\,i\,\psi''(1-\psi')^2 - i\,\psi''''],\\ \overline{\mathfrak{F}}''''(\varphi\psi) &= e^{-i(\varphi-\psi)}[(1-\psi')^4 + 4\,\psi'''(1-\psi') - 3\,\psi''^2 - 6\,i\,\psi''(1-\psi')^2 + i\,\psi'''']\end{aligned}\right| \tag{115}$$

a) Anpassung bis zur Ableitung dritter Ordnung. Sind drei Ableitungen gegeben, so führt der Entwicklungsgang zu Gleichungen, die den Gleichungen (32), (33), (36) und (46) entsprechen. Die dreistelligen Determinanten $\mathfrak{d}_1$ bis $\mathfrak{d}_4$ in (36) werden hier aus den Ableitungen der $\mathfrak{F}$-Größen gebildet. So ergibt sich z. B. entsprechend Gl. (37) die Determinante $\mathfrak{d}_1$ wie folgt:

$$\mathfrak{d}_1 = \begin{vmatrix} \overline{\mathfrak{F}}'(\varphi\psi) & \mathfrak{F}'(\varphi\psi) & \mathfrak{F}'(\varphi)\\ \overline{\mathfrak{F}}''(\varphi\psi) & \mathfrak{F}''(\varphi\psi) & \mathfrak{F}''(\varphi)\\ \overline{\mathfrak{F}}'''(\varphi\psi) & \mathfrak{F}'''(\varphi\psi) & \mathfrak{F}'''(\varphi)\end{vmatrix}, \tag{116}$$

Die Determinanten $\mathfrak{d}_2$ bis $\mathfrak{d}_4$ werden nach (38) bis (40) in derselben Weise gebildet.

Die Gleichungen (33), (36) und (46) mit dieser Bedeutung der $\mathfrak{F}$-Größen und der Determinanten $\mathfrak{d}$ stellen algebraische Ausdrücke der Kreisungspunktkurve der Bewegung vom Getriebeglied a gegenüber dem Glied b dar. Es können die den Gleichungen (35), (41) und (47) entsprechenden Ausdrücke gebildet werden, die die Angelpunktkurve dieser Bewegung algebraisch darstellen.

Drittes Zahlenbeispiel. Gegeben ist wie in den ersten beiden Beispielen die Funktion

$$y^2 = 2\,p\,x \qquad \text{[siehe (62)]}$$

und die daraus abgeleitete Funktion

$$\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi}{3}\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right) \qquad \text{[siehe (64)]}$$

(siehe auch Abb. 11). Die Winkeldrehung $\psi = f(\varphi)$ am Gelenkviereck soll der Funktion (64) im Nullpunkt so angepaßt werden, daß die Ableitungen bis zur dritten Ordnung übereinstimmen.

Die erste Ableitung des Winkels ψ nach dem Winkel φ in (64) ergibt, wenn $d\psi/d\varphi = \psi'$ geschrieben wird

$$2\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right)\psi' = \frac{\pi}{3} \quad \text{oder} \quad \psi' = -\frac{\pi/6}{\psi + \frac{\pi}{6}}. \tag{117}$$

Die zweite Ableitung ergibt

$$\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right)\psi'' + \psi'^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \psi'' = \frac{\psi'^2}{\psi + \frac{\pi}{6}} = -\frac{(\pi/6)^2}{\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right)^3}. \tag{118}$$

Die dritte Ableitung ergibt

$$\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right)\psi''' + 3\,\psi'\,\psi'' = 0 \quad \text{oder} \quad \psi''' = -\frac{3\,\psi'\,\psi''}{\psi + \frac{\pi}{6}} = +\frac{3 \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right)^5}. \tag{119}$$

Für den Nullpunkt wird damit

$$\psi'(0) = 1\,, \quad \psi''(0) = -\frac{6}{\pi}\,, \quad \psi'''(0) = +\frac{108}{\pi^2}\,. \tag{120}$$

Werden diese Werte in (104) bis (115) eingesetzt, so erhält man folgende Werte für die $\mathfrak{F}$-Größen:

	$\mathfrak{F}(\psi)$	$\mathfrak{F}(\psi)$	$\mathfrak{F}(\psi\,\psi)$
$\mathfrak{F}_0'$	$0 + i\,1$	$0 + i\,1$	$0 + i\,0$
$\mathfrak{F}_0''$	$-1 + i\,0$	$-1 - i\,\frac{6}{\pi}$	$0 + i\,\frac{6}{\pi}$
$\mathfrak{F}_0'''$	$0 - i\,1$	$+\frac{18}{\pi} + i\left(\frac{108}{\pi^2} - 1\right)$	$0 - i\,\frac{108}{\pi^2}$

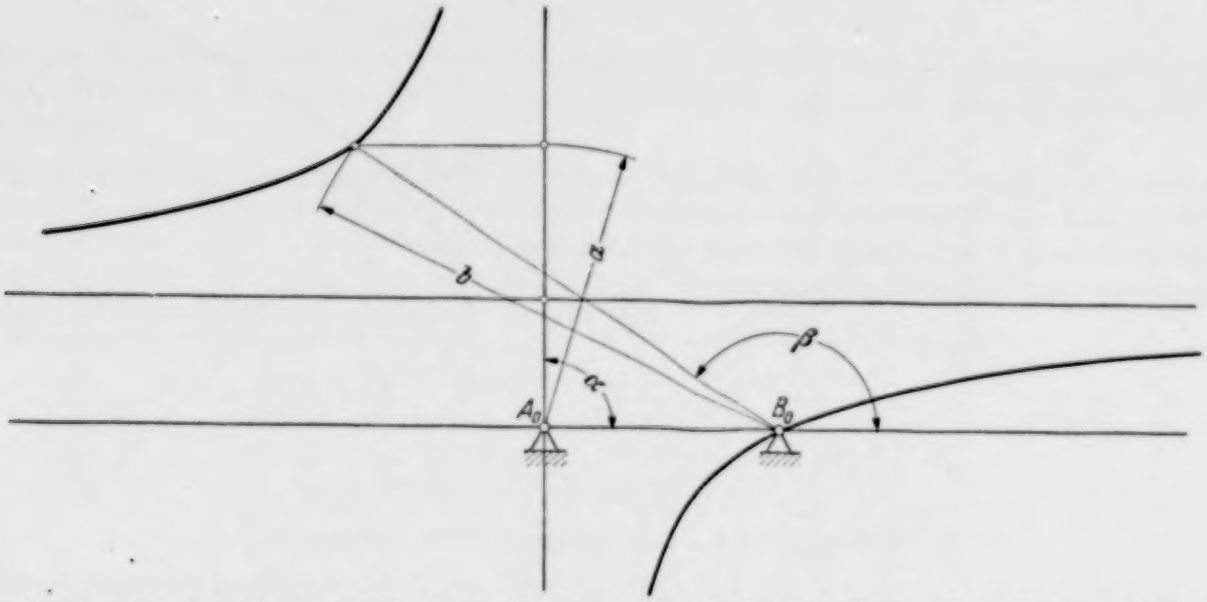


Abb. 15. Darstellung der Kurven $a = f(\alpha)$ und $b = f(\beta)$ für das dritte Zahlenbeispiel (Angelpunkt- und Kreisungspunktkurve).

Die Berechnung der Determinanten $\mathfrak{d}_1$ bis $\mathfrak{d}_4$, die in (37) bis (40) und in abgewandelter Form in (121) dargestellt sind, kann wie im ersten Beispiel mit Hilfe von (64/1) bis (64/6) ausgeführt werden und führt zu folgenden Werten:

$$\mathfrak{d}_1 = 0\,, \qquad \mathfrak{d}_3 = -\frac{108}{\pi^2}\,,$$

$$\mathfrak{d}_2 = -\frac{108}{\pi^2}\,, \qquad \mathfrak{d}_4 = +i\,\frac{36}{\pi}\,.$$

Setzt man diese Werte in (46) ein, so erhält man folgende Lösungen:

$$\cos\alpha = 0\,, \qquad \alpha = 90^\circ \text{ und } 270^\circ$$

und

$$\alpha = \frac{\pi}{6}\,\frac{1}{\sin\alpha}\,.$$

Der geometrische Ort für den Endpunkt des Vektors $\mathfrak{a}$ sind zwei sich senkrecht schneidende Geraden: die Ordinantenachse und eine zur Abszissenachse parallele Gerade im Abstande $\pi/6$ (Abb. 15). Das Geradenkreuz ist eine Sonderform der Angelpunktkurve für die Bewegung des Gliedes b relativ zum Glied a.

Die dazugehörige Kreisungspunktkurve erhält man als Darstellung der Funktion $b = f(\beta)$. Zu ihrer Ermittlung werden die Determinanten $\mathfrak{d}_5$ bis $\mathfrak{d}_8$ nach (42) bis (45) mit Hilfe von (64/1) bis

(64/6) berechnet. Die Rechnung führt zu folgenden Ergebnissen:

$$\mathfrak{d}_5 = 0\,, \qquad \mathfrak{d}_7 = -\frac{108}{\pi^2}\,,$$

$$\mathfrak{d}_6 = +\frac{108}{\pi^2}\,, \qquad \mathfrak{d}_8 = \frac{216}{\pi^2} - i\,\frac{36}{\pi}\,.$$

Werden diese Werte in (47) eingesetzt, so erhält man folgende Beziehungen für die Funktion $b = f(\beta)$:

$$b = \frac{\pi}{6}\,\frac{1}{\sin\beta} - \frac{1}{\cos\beta}\,.$$

Um den Charakter dieser Funktion als dargestellte Kurve erkennen zu können, wird

$$b\sin\beta = y \quad \text{und} \quad b\cos\beta = x$$

gesetzt. Die Funktion erhält damit folgende Form:

$$\frac{\pi/6}{y} - \frac{1}{x} = 1\,.$$

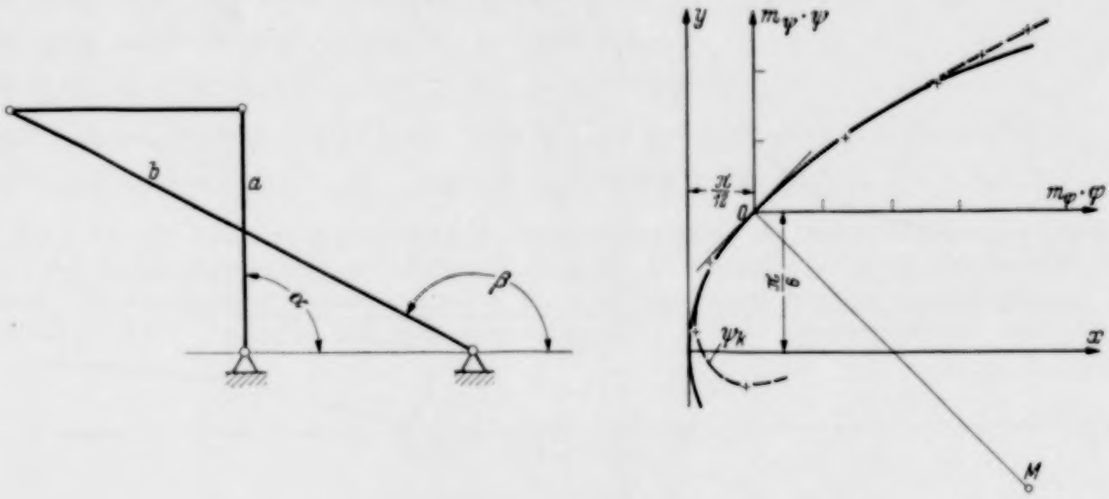


Abb. 16. Gelenkviereck nach dem dritten Zahlenbeispiel für $\alpha = 90°$ und $a = \frac{\pi}{3}$.

Wird eine Parallelverschiebung der Achsen als Koordinatentransformation mit den Beziehungen

$$x = u - 1\,, \qquad y = v + \frac{\pi}{6}\,,$$

durchgeführt, so erhält man nach einigen Umformungen die Beziehung:

$$u\,v = -\frac{\pi}{6}\,.$$

Diese Funktion stellt, als Kreisungspunktkurve dargestellt, eine gleichschenklige Hyperbel dar, deren Asymptoten die Geraden sind, die sich als Angelpunktkurve ergeben haben (Abb. 15).

Das Ergebnis des vierten Zahlenbeispiels, in dem außer den Ableitungen erster bis dritter Ordnung auch noch die vierte Ableitung gegeben ist, erfüllt zugleich die Bedingungen dieses dritten Beispiels: Die Endpunkte der beiden Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ liegen auf der Ordinantenachse und die Endpunkte der beiden Vektoren $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ auf der Hyperbel.

Abb. 16 zeigt ein Beispiel für $\mathfrak{a} = \pi/3$ und $\mathfrak{b} = -2 + i\,\pi/3$. Hierfür ist $b = 2{,}2413$ und $\beta = 152{,}36°$. Außerdem ist der Verlauf $\psi_k = f(\varphi_k)$ des Kurbelgetriebes im Vergleich zur gegebenen Funktion

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi}{3}\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right)} - \frac{\pi}{6}$$

dargestellt. Da das Übersetzungsverhältnis $d\psi/d\varphi = \psi' = 1$ gegeben ist, muß in jedem Fall die Koppel parallel zum Gestell liegen. Der Teil der Angelpunktkurve, der durch die Parallele zur

Gestellgeraden dargestellt wird (Abb. 15), führt infolgedessen zu keiner Lösung, weil für jeden ihrer Punkte der entsprechende Punkt auf der Kreisungspunktkurve im Unendlichen liegt.

b) Anpassung bis zur Ableitung vierter Ordnung. Soll die Funktion $\psi = f(\varphi)$ eines Gelenkviereckes (Abb. 10) mit den Ableitungen einer gegebenen Funktion bis zur vierten Ordnung übereinstimmen, so ist eine freie Wahl einer Bestimmungsgröße nicht mehr möglich. Die Abmessungen des Gelenkviereckes ist dann eindeutig bestimmbar, wobei es je nach der Größe der vorgegebenen Ableitungen entweder eine Lösung oder drei Lösungen gibt. Mittels komplexer Zahlen der *Gauß*schen Zahlenebene läßt sich das Problem ähnlich darstellen, wie das der Zuordnung von vier Winkelpaaren.

Bringt man die vier Gleichungen (100) bis (103) in die Form (65), so ergeben sich durch Zusammenfassen vier Beziehungen, die den Gleichungen (66) bis (69) entsprechen. Die mit $\mathfrak{d}$ bezeichneten vierstelligen Determinanten werden hier aus den Ableitungen der $\mathfrak{F}$-Größen gebildet. So hat z. B. $\mathfrak{d}_1$ folgende Form:

$$\mathfrak{d}_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}'(\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}'(\psi) & \mathfrak{F}'(\varphi\psi) & \overline{\mathfrak{F}}'(\varphi\psi) \\ \mathfrak{F}''(\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}''(\psi) & \mathfrak{F}''(\varphi\psi) & \overline{\mathfrak{F}}''(\varphi\psi) \\ \mathfrak{F}'''(\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}'''(\psi) & \mathfrak{F}'''(\varphi\psi) & \overline{\mathfrak{F}}'''(\varphi\psi) \\ \mathfrak{F}''''(\varphi) & \overline{\mathfrak{F}}''''(\psi) & \mathfrak{F}''''(\varphi\psi) & \overline{\mathfrak{F}}''''(\varphi\psi) \end{vmatrix}. \tag{121}$$

Die übrigen Determinanten $\mathfrak{d}_2$ bis $\mathfrak{d}_4$ werden entsprechend (72), (73) und (74) in der gleichen Weise gebildet. Mit dieser Bedeutung haben die weiteren Gleichungen (78), (85), (86) und (87) auch hier Gültigkeit.

Viertes Zahlenbeispiel. Wird in dem dritten Beispiel als weitere Bedingung die vierte Ableitung gegeben, so können nach den entwickelten Formeln die Abmessungen des Gelenkviereckes bestimmt werden, wobei es drei Lösungen geben kann, wenn (85) drei reelle Wurzeln besitzt.

Wird die vierte Ableitung von (64) gebildet — die erste, zweite und dritte Ableitung sind bereits in (117) bis (119) dargestellt — so ergibt sich

$$\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right)\psi'''' + 4\,\psi'\,\psi''' + 3\,\psi''^2 = 0$$

oder

$$\psi'''' = -\frac{4\,\psi'\,\psi''' + 3\,\psi''^2}{\psi + \frac{\pi}{6}} = -\frac{15\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right)^7}. \tag{122}$$

Für den Nullpunkt ist dann

$$\psi''''(0) = -\frac{3240}{\pi^3}. \tag{123}$$

Für die gegebenen Ableitungen im Nullpunkt

$$\psi'(0) = 1, \quad \psi''(0) = -\frac{6}{\pi}, \quad \psi'''(0) = +\frac{108}{\pi^2} \quad \text{und} \quad \psi''''(0) = -\frac{3240}{\pi 3}$$

erhält man unter Berücksichtigung von (104) bis (107), (108) bis (111) und (112) bis (115) folgende Werte:

	$\mathfrak{F}(\varphi)$	$\mathfrak{F}(\psi)$	$\mathfrak{F}(\varphi\psi)$
$\mathfrak{F}_0'$	$0 + i\,1$	$0 \quad + i\,1$	$0 \quad + i\,0$
$\mathfrak{F}_0''$	$-1 + i\,0$	$-1 \quad - i\,\frac{6}{\pi}$	$0 \quad + i\,\frac{6}{\pi}$
$\mathfrak{F}_0'''$	$0 - i\,1$	$+\frac{18}{\pi} \quad - i\left(1 - \frac{108}{\pi^2}\right)$	$0 \quad - i\,\frac{108}{\pi^2}$
$\mathfrak{F}_0''''$	$+1 + i\,0$	$+\left(1 - \frac{540}{\pi^2}\right) + i\,\frac{36}{\pi}\left(1 - \frac{90}{\pi^2}\right)$	$-\frac{108}{\pi^2} + i\,\frac{3240}{\pi^3}$

Mit diesen Größen erhält die Determinante $\mathfrak{d}$ nach (70) den Wert null. Ferner wird nach (71) bis (74) $d_{y1} = d_{y2} = 0$ und $\mathfrak{d}_3 = \overline{\mathfrak{d}}_4$. Die Gleichungen (66) bis (69) führen damit lediglich zu der

Beziehung

$$\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{a}}{\bar{\mathfrak{a}}} = -1 = e^{i\,2\alpha}. \tag{124}$$

Hieraus ergibt sich

$$2\alpha = 180^\circ \quad \text{und} \quad \alpha = 90^\circ.$$

Für die Ermittlung der übrigen Bestimmungsgrößen des Gelenkvierecks ist diese Entwicklung ungeeignet.

Gibt man (100) bis (103) folgende Form:

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_0'(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) - \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0'(\varphi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi) = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_0'(\varphi\psi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi), \tag{125}$$

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_0''(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''(\psi) - \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0''(\psi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi) = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_0''(\varphi\psi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi\psi), \tag{126}$$

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_0'''(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'''(\psi) - \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0'''(\varphi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi) = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_0'''(\varphi\psi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'''(\varphi\psi), \tag{127}$$

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_0''''(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''''(\psi) - \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0''''(\varphi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''''(\varphi) = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_0''''(\varphi\psi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''''(\varphi\psi). \tag{128}$$

so erhält man durch das Zusammenfassen folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d}_1 + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{d}}_2, \tag{129}$$

$$\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d}_2 + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{d}}_1, \tag{130}$$

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d}_3 + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{d}}_4, \tag{131}$$

$$\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d}_4 + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{d}}_3, \tag{132}$$

aus denen die Abmessungen des Gelenkviereckes ermittelt werden können. Die Determinanten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ und $\mathfrak{d}_4$ haben hier folgende Form:

$$\mathfrak{d} = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_0'(\psi) & \bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & \mathfrak{F}_0'(\varphi) & \bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi) \end{vmatrix}, \tag{133}$$

$$\mathfrak{d}_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_0'(\varphi\psi) & \bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & \mathfrak{F}_0'(\psi) & \bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi) \end{vmatrix}, \tag{134}$$

$$\mathfrak{d}_2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_0'(\psi) & \bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) & \mathfrak{F}_0'(\varphi) & \bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi) \end{vmatrix}, \tag{135}$$

$$\mathfrak{d}_3 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_0'(\psi) & \bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & \mathfrak{F}_0'(\varphi\psi) & \bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi) \end{vmatrix}, \tag{136}$$

$$\mathfrak{d}_4 = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_0'(\psi) & \bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & \mathfrak{F}_0'(\varphi) & \bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) \end{vmatrix}. \tag{137}$$

Die Berechnung dieser Determinanten, die mit Hilfe von (88) bis (93) durchgeführt werden kann, führt zu folgenden Werten:

$$\mathfrak{d} = -218{,}853\,7,$$

$$\mathfrak{d}_1 = -261{,}370\,2 + i\,125{,}394\,0,$$

$$\mathfrak{d}_2 = -217{,}599\,4 + i\,376{,}181\,9,$$

$$\mathfrak{d}_3 = -\,21{,}885\,37 - i\,125{,}394\,0,$$

$$\mathfrak{d}_4 = +21{,}885\,37 + i\,125{,}394\,0.$$

Wie aus den Werten für $\mathfrak{d}_3$ und $\mathfrak{d}_4$ zu erkennen ist, ist $\mathfrak{d}_3 = -\mathfrak{d}_4$. Damit ergibt sich aus (131) und (132) auch hier die Beziehung

$$\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}} = 0 \quad \text{und damit} \quad \alpha = 90^\circ \qquad \text{[siehe (124)]}$$

Wird $\mathfrak{a} = -\bar{\mathfrak{a}}$ in (129) und (130) eingesetzt, so erhält man

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,(\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{d}}_2), \tag{138}$$

$$\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,(\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d}_2 - \mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{d}}_1). \tag{139}$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen und einigen weiteren Umformungen erhält man die Gleichung

$$e^{i\,2\beta}\,\bar{\mathfrak{d}}_1 + e^{-i\,2\beta}\,\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2 + \bar{\mathfrak{d}}_2. \tag{140}$$

Unter Berücksichtigung von (3) und (9) ergibt sich durch weitere Umformungen die Beziehung

$$d_{x1} \cos 2\beta + d_{y1} \sin 2\beta = d_{x2} . \tag{141}$$

Zur Auflösung dieser Gleichung nach der Unbekannten β wird

$$d_{x1} = S \sin \sigma \quad \text{und} \quad d_{y1} = S \cos \sigma \tag{142} \quad (143)$$

gesetzt. Dann erhält man nach Einsetzen in (141):

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{d_{x1}}{S} - \sigma \right). \tag{144}$$

Die Werte für S und σ ergeben sich aus den Beziehungen

$$S = \sqrt{d_{x1}^2 + d_{y1}^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{d_{x1}}{d_{y1}} . \tag{145} \quad (146)$$

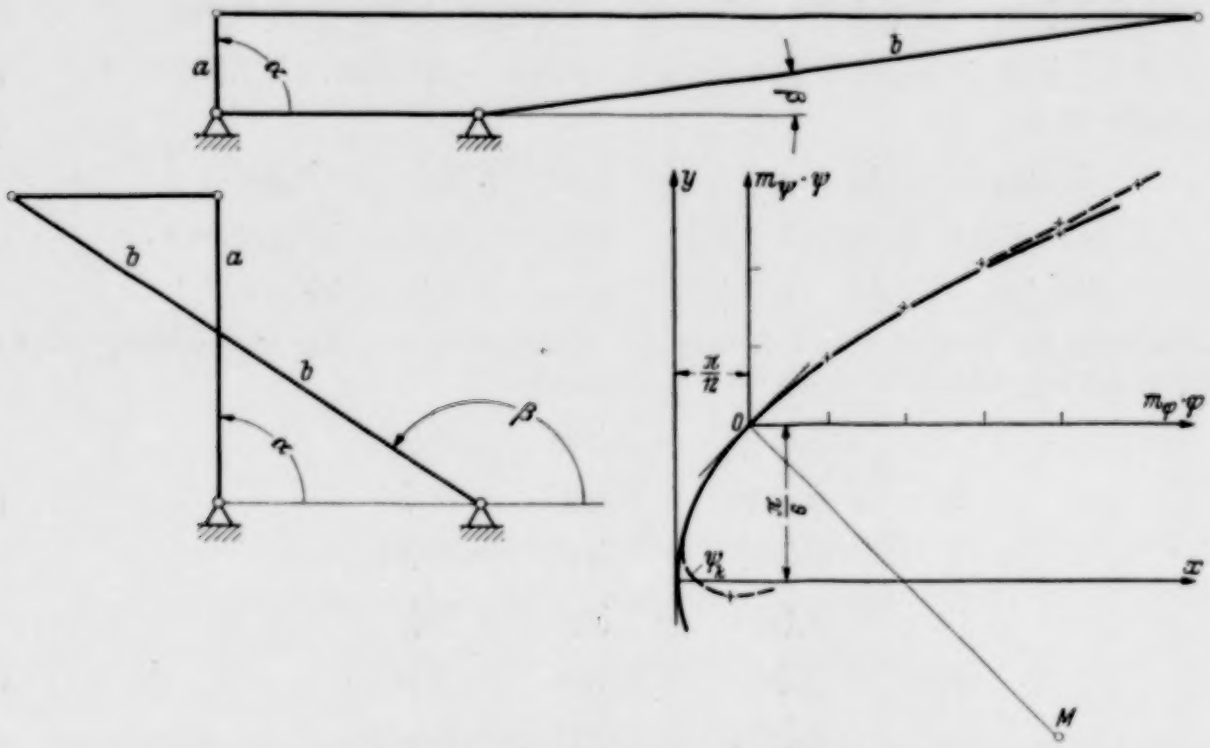


Abb. 17. Gelenkvierecke nach dem vierten Zahlenbeispiel.

Mit Hilfe von (131) und (124) erhält man dann für die Länge des Lenkers

$$b = \frac{\mathfrak{d}}{e^{-i\beta} d_3 + e^{i\beta} \bar{\mathfrak{d}}_3} . \tag{147}$$

Aus (139) erhält man weiterhin

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}_2 - e^{i2\beta} \bar{\mathfrak{d}}_1} . \tag{148}$$

Werden die Zahlenwerte in (144) eingesetzt, so führt die Rechnung zu zwei Werten für β:

$$\beta_1 = 180^\circ - 33{,}47 = 146{,}53^\circ \quad \text{und} \quad \beta_2 = 7{,}86^\circ .$$

Aus (147) erhält man dann

$$b_1 = 2{,}1499 \quad \text{und} \quad b_2 = 2{,}817\,5 .$$

Gleichung (148) ergibt

$$a_1 = 1{,}184\,2 \quad \text{und} \quad a_2 = 0{,}385\,48 .$$

Abb. 17 zeigt die beiden Kurbelgetriebe in der errechneten Bemessung.

5. Zuordnung von Winkeln und Anpassung ihrer Ableitungen an Kurbelgetriebe mit vier Drehgelenken. Wie in vorstehenden Abschnitten gezeigt wurde, können am Gelenkviereck die Zuordnung von Winkeln und die Anpassung der Ableitungen von Winkeln mittels ähnlicher algebraischer Formeln behandelt werden, wenn man die Darstellung in der *Gauß*schen Zahlen-

ebene wählt. Eine entsprechende Lösung ist in dieser Darstellungsform auch möglich, wenn die Bedingungen kombiniert werden. Mittels geometrischer Verfahren ist eine derartige Aufgabenstellung bisher noch nicht gelöst worden.

Werden vier Bedingungen gestellt, so ist eine Größe für die Bemessung des Gelenkviereckes noch frei wählbar; bei fünf gegebenen Bedingungen läßt sich das Gelenkviereck in seinen Abmessungen berechnen, wobei es gegebenenfalls drei Lösungen gibt.

a) Vorgabe von vier Bedingungen. Es sei von einer Funktion $\psi = f(\varphi)$ gegeben ein Punkt 0 (Abb. 3), durch den die Koordinatenachsen hindurchgelegt werden, die erste und zweite Ableitung in diesem Punkt und damit die Steigung und Krümmung der Kurve und ein weiterer Punkt 1 der Kurve, dem die zugeordneten Winkel φ_1 und ψ_1 entsprechen. Aus diesen gegebenen Bedingungen erhält man nach (31) und (32) folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{b}\,[\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_0'(\psi)] + \bar{\mathfrak{b}}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0'(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi)] + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0'(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi)] = 0\,, \tag{149}$$

$$\mathfrak{b}\,[\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_0''(\psi)] + \bar{\mathfrak{b}}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0''(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_0''(\psi)] + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0''(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi)] = 0\,, \tag{150}$$

$$\mathfrak{b}\,[\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_1(\psi)] + \bar{\mathfrak{b}}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_1(\psi)] + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi)] = 0\,. \tag{151}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_0'(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0'(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0'(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi) \\ \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_0''(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0''(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_0''(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0''(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi) \\ \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_1(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_1(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi) \end{vmatrix} = 0\,. \tag{152}$$

Zur Bestimmung des Vektors $\mathfrak{a}$ wird diese Determinante aufgelöst. Die Entwicklung führt auch hier auf (36) mit folgender Bedeutung der Determinanten $\mathfrak{d}$:

$$\mathfrak{d}_1 = \begin{vmatrix} +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi) \\ +\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi) \\ +\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) \end{vmatrix}, \tag{153}$$

$$\mathfrak{d}_2 = \begin{vmatrix} -\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi) \\ -\mathfrak{F}_0''(\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi) \\ -\mathfrak{F}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) \end{vmatrix}, \tag{154}$$

$$\mathfrak{d}_3 = \begin{vmatrix} -\bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi) \\ -\bar{\mathfrak{F}}_0''(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi) \\ -\bar{\mathfrak{F}}_1(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) \end{vmatrix}, \tag{155}$$

$$\mathfrak{d}_4 = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi) \\ +\mathfrak{F}_0''(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0''(\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi) \\ +\mathfrak{F}_1(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) \end{vmatrix}. \tag{156}$$

Gleichung (152) stellt eine Kurve $a = f(\alpha)$ dar. Wird das Koppelgelenk des Lenkers a auf dieser Kurve gewählt, so ergibt sich ein Gelenkviereck, das die gegebenen Bedingungen erfüllt. Aus zwei der drei Gleichungen (149) bis (151) ergibt sich der zugehörige Vektor $\mathfrak{b}$ nach Größe b und Richtung β.

Von den verschiedenen Möglichkeiten für die Kombination der Bedingungen soll noch ein weiterer Fall gezeigt werden: Es sollen zwei Punkte 0 und 1 einer Funktion und deren 1. Ableitung in diesen beiden Punkten von dem gesuchten Gelenkviereck verwirklicht werden. Nach (31) und (32) müssen danach folgende Beziehungen erfüllt sein:

$$\mathfrak{b}\,[\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_0'(\psi)] + \bar{\mathfrak{b}}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0'(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi)] + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0'(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi)] = 0\,, \tag{157}$$

$$\mathfrak{b}\,[\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_1(\psi)] + \bar{\mathfrak{b}}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_1(\psi)] + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi)] = 0\,, \tag{158}$$

$$\mathfrak{b}\,[\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1'(\varphi\psi) - \mathfrak{F}_1'(\psi)] + \bar{\mathfrak{b}}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1'(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_1'(\psi)] + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1'(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1'(\varphi)] = 0\,. \tag{159}$$

Die Koeffizienten $\mathfrak{F}$ der Gleichung (159) ergeben sich aus der ersten Ableitung der Funktion im Punkt 1, was durch den Index 1 gekennzeichnet ist.

Die dreistellige Determinante für den Vektor $\mathfrak{a}$ hat hier die Form

$$\begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(q\psi) - \mathfrak{F}_0'(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0'(q\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}'(\varphi) + \bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi) \\ \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1(q\psi) - \mathfrak{F}_1(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(q\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_1(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(\varphi) + \bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi) \\ \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1'(q\psi) - \mathfrak{F}_1'(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1'(q\psi) - \bar{\mathfrak{F}}_1'(\psi) & \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1'(\varphi) + \bar{\mathfrak{F}}_1'(\varphi) \end{vmatrix} = 0. \tag{160}$$

Die Umformung der Determinante führt zu (36) mit folgender Bedeutung der dreistelligen Determinanten $\mathfrak{d}$:

$$\mathfrak{d}_1 = \begin{vmatrix} +\bar{\mathfrak{F}}_0'(q\psi) & +\mathfrak{F}_0'(q\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi) \\ +\bar{\mathfrak{F}}_1(q\psi) & +\mathfrak{F}_1(q\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) \\ +\bar{\mathfrak{F}}_1'(q\psi) & +\mathfrak{F}_1'(q\psi) & +\mathfrak{F}_1'(\varphi) \end{vmatrix}, \tag{161}$$

$$\mathfrak{d}_2 = \begin{vmatrix} -\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(q\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi) \\ -\mathfrak{F}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(q\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) \\ -\mathfrak{F}_1'(\psi) & +\mathfrak{F}_1'(q\psi) & +\mathfrak{F}_1'(\varphi) \end{vmatrix}, \tag{162}$$

$$\mathfrak{d}_3 = \begin{vmatrix} -\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(q\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi) \\ -\mathfrak{F}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(q\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) \\ -\mathfrak{F}_1'(\psi) & +\mathfrak{F}_1'(q\psi) & +\mathfrak{F}_1'(\varphi) \end{vmatrix}, \tag{163}$$

$$\mathfrak{d}_4 = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi) \\ +\mathfrak{F}_1(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) \\ +\mathfrak{F}_1'(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1'(\psi) & +\mathfrak{F}_1'(\varphi) \end{vmatrix}. \tag{164}$$

Bei der Kombination gegebener Funktionspunkte und ihrer Ableitungen darf eine höhere Ableitung an einem Punkt nur dann gegeben werden, wenn die niederen Ableitungen dieses Punktes auch gegeben sind; denn die dritte Ableitung $\mathfrak{F}'''(\psi)$ z. B. enthält nach (110) nicht nur ψ''' sondern auch ψ' und ψ''.

Fünftes Zahlenbeispiel. Wie in den vorhergehenden Beispielen ist die Funktion

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi}{3}\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right)} - \frac{\pi}{6} \qquad \text{[siehe (64)]}$$

gegeben. Mit dem Gelenkviereck soll die erste und zweite Ableitung der Funktion im Nullpunkt und der Punkt 3 mit

$$\varphi_3 = 45° \quad \text{und} \quad \psi_3 = 30°$$

verwirklicht werden.

Aus dem ersten und dritten Beispiel können die Werte für die $\mathfrak{F}$-Größen entnommen werden:

	$\mathfrak{F}(\varphi)$	$\mathfrak{F}(\psi)$	$\mathfrak{F}(\psi\varphi)$
$\mathfrak{F}_3$	$-0{,}292\,893\,2 + i\,0{,}707\,106\,8$	$-0{,}133\,974\,6 + i\,0{,}5$	$-0{,}034\,074\,2 + i\,0{,}258\,819\,0$
$\mathfrak{F}_0'$	$0 + i\,1$	$0 + i\,1$	$0 + i\,0$
$\mathfrak{F}_0''$	$-1 + i\,0$	$-1 - i\,\frac{6}{\pi}$	$0 + i\,\frac{6}{\pi}$

Mit Hilfe von (64/1) bis (64/6) ergeben sich aus (37) bis (40) für die Determinanten $\mathfrak{d}_1$ bis $\mathfrak{d}_4$ folgende Werte:

$$\mathfrak{d}_1 = -0{,}130\,153\,8\,,$$
$$\mathfrak{d}_2 = -0{,}238\,435\,2 - i\,0{,}098\,763\,0\,,$$
$$\mathfrak{d}_3 = -0{,}362\,696\,2 + i\,0{,}166\,911\,4\,,$$
$$\mathfrak{d}_4 = -0{,}097\,531\,6 + i\,0{,}317\,837\,2\,.$$

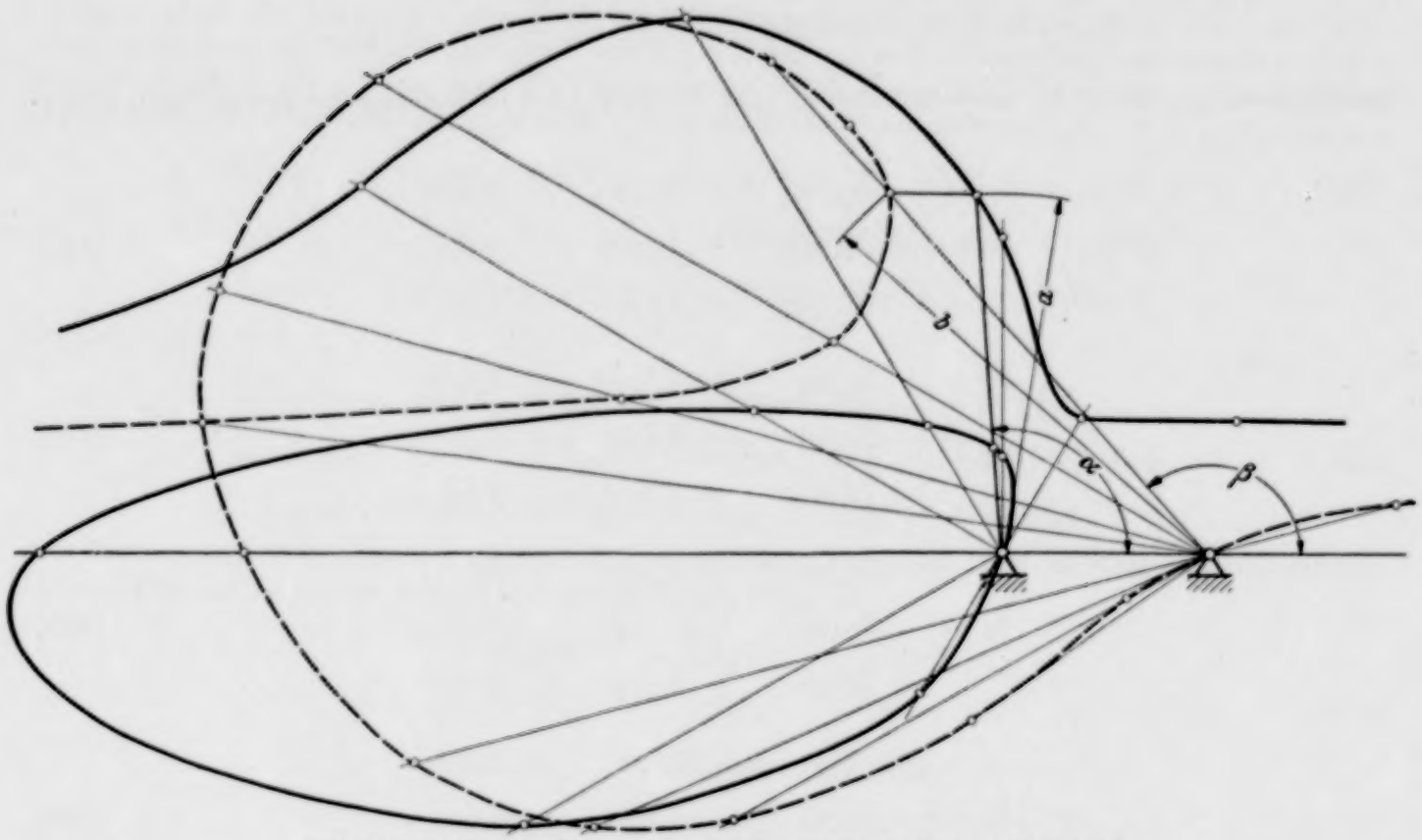


Abb. 18. Darstellung der Kurven $a = f(\alpha)$ und $b = f(\beta)$ für das fünfte Zahlenbeispiel.

Zur Darstellung der Funktion $a = f(\alpha)$ können aus (46) folgende Werte errechnet werden:

α	$d_{x1}\sin\alpha + d_{y1}\cos\alpha$	$d_{x2}\sin 2\alpha + d_{y2}\cos 2\alpha + d_{y3}$	$d_{x4}\sin\alpha + d_{y4}\cos\alpha$	a_1	a_2
0	0	+ 0,068 0	+ 0,317 837 2	— 4,674 08	∞
30	— 0,065 076 9	— 0,089 109 3	+ 0,226 489 2	— 2,671 87	+ 1,302 58
60	— 0,112 716 4	+ 0,009 653 7	+ 0,074 453 8	— 0,813 87	+ 0,771 04
90	— 0,130 153 8	+ 0,265 526 0	— 0,097 531 6	+ 0,480 47	+ 1,559 62
120	— 0,112 716 4	+ 0,422 635 3	— 0,243 383 4	+ 0,710 50	+ 3,039 04
150	— 0,065 076 9	+ 0,323 872 3	— 0,324 020 8	+ 1,387 02	+ 3,589 74
180	0	+ 0,068 0	— 0,317 837 2	+ 4,674 08	∞

Wird $d_{x4}\sin\alpha + d_{y4}\cos\alpha = 0$ gesetzt, so ergibt sich hierfür ein Winkel $\alpha = 72{,}94°$. Aus (46) erhält man dann: $a_1 = 0$ und $a_2 = +0{,}922\,555$.

In Abb. 18 ist die Funktion $a = f(\alpha)$ als Kurve dargestellt. Für $\alpha = 93{,}9°$ ergibt die Rechnung $a_1 = +0{,}516\,738$ und $a_2 = +1{,}772\,595$; a_2 entspricht dem Ergebnis des sechsten Zahlenbeispiels, das dort bei Vorgabe einer weiteren Bedingung errechnet ist.

Zur Ermittlung der Funktion $b = f(\beta)$ sind die Determinanten $\mathfrak{d}_5$ bis $\mathfrak{d}_8$ nach (42) bis (45) mit Hilfe von (64/1) bis (64/6) berechnet worden mit folgendem Ergebnis:

$$\mathfrak{d}_5 = +0{,}130\,153\,8\,,$$
$$\mathfrak{d}_6 = +0{,}368\,589\,0 + i\,0{,}098\,763\,0\,,$$
$$\mathfrak{d}_7 = -0{,}362\,696\,2 - i\,0{,}166\,911\,4\,,$$
$$\mathfrak{d}_8 = +0{,}704\,555\,8 - i\,0{,}317\,837\,2\,.$$

Durch Einsetzen dieser Größen in (47) erhält man eine Formel zur Berechnung folgender Werte:

β	$d_{x5}\sin\beta$	$d_{x6}\sin 2\beta+d_{y6}\cos 2\beta+d_{y7}$	$d_{x8}\sin\beta+d_{y8}\cos\beta$	b_1	b_2
0	0	— 0,068 148 4	— 0,317 837 2	+ 4,674 08	∞
15	+ 0,033 686 3	+ 0,102 914 3	— 0,124 654 8	+ 0,928 80	— 3,983 87
30	+ 0,065 076 9	+ 0,201 677 4	+ 0,077 022 9	— 0,446 2	— 2,652 94
150	+ 0,065 076 9	— 0,436 737 2	+ 0,627 532 9	+ 4,627 06	+ 2,084 07
165	+ 0,033 686 3	— 0,265 674 7	+ 0,489 359 6	+ 4,954 89	+ 2,931 84
180	0	— 0,068 148 4	+ 0,317 837 2	+ 4,674 08	∞

Setzt man $d_{x8}\sin\beta + d_{y8}\cos\beta = 0$, so ergibt sich der Wert $\beta = 24{,}28°$. Aus (47) erhält man die zugehörigen Werte: $b_1 = 0$ und $b_2 = -3{,}265\,766$.

Wie Gl. (47) zeigt, erhält man nur jeweils einen Wert für b, wenn folgende Beziehung erfüllt ist,

$$(d_{x6}\sin 2\beta + d_{y6}\cos 2\beta + d_{y7})^2 - 4\,(d_{x5}\sin\beta + d_{y5}\cos\beta)\,(d_{x8}\sin\beta + d_{y8}\cos\beta) = 0.$$

Durch Umformung kann diese Gleichung auf folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}^4\beta\,[(d_{y6}-d_{y7})^2 - 4\,d_{x5}\,d_{x8}] + \operatorname{tg}^3\beta\cdot 4\,[-d_{x6}\,(d_{y6}-d_{y7}) - d_{x5}\,d_{y8} - d_{y5}\,d_{x8}]\\ &+ \operatorname{tg}^2\beta\cdot 2\,[2\,d_{x6}^2 - (d_{y6}-d_{y7})\,(d_{y6}+d_{y7}) - 2\,(d_{x5}\,d_{x8}+d_{y5}\,d_{y8})]\\ &+ \operatorname{tg}\beta\cdot 4\,[d_{x6}\,(d_{y6}+d_{y7}) - d_{x5}\,d_{y8} - d_{y5}\,d_{x8}] + (d_{y6}+d_{y7})^2 - 4\,d_{y5}\,d_{x8} = 0.\end{aligned}$$

Werden hierin die Zahlenwerte eingesetzt, so erhält man

$$\operatorname{tg}^4\beta + 0{,}763\,717\,\operatorname{tg}^3\beta - 0{,}718\,520\,\operatorname{tg}^2\beta - 0{,}219\,418\,\operatorname{tg}\beta - 0{,}015\,678\,24 = 0.$$

Die Werte für $\operatorname{tg}\beta$, die die Gleichung vierten Grades erfüllen, können mittels des *Horner*schen Schemas ermittelt werden:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\beta_1 &= +0{,}7146, & \beta_1 &= 35{,}55°,\\ \operatorname{tg}\beta_2 &= -1{,}2152, & \beta_2 &= 129{,}45°,\\ \operatorname{tg}\beta_3 &= -0{,}1316, & \beta_3 &= 172{,}5°.\end{aligned}$$

Aus Gl. (47) können die zugehörigen Werte für b berechnet werden:

$$b_1 = 1{,}412, \qquad b_2 = +2{,}725, \qquad b_3 = +4{,}913.$$

Wie die Darstellung der Funktion $b = f(\beta)$ in Abb. 18 zeigt, sind zwischen den Winkeln 35,55° und 129,45° keine Kurvenpunkte vorhanden. Beim Winkel $\beta = 172{,}5°$ schneiden sich zwei Kurventeile, so daß sich dort als Schnittpunkt ein Doppelpunkt ergibt.

Aus (47) ergeben sich für den Winkel $\beta = 131{,}05°$ die zugehörigen Werte $b_1 = +3{,}207\,3$ und $b_2 = +2{,}350\,8$. Der Wert für b_2 entspricht dem Ergebnis des sechsten Zahlenbeispiels, das aus anderen Beziehungen ermittelt worden ist.

In Abb. 19 ist ein Kurbelgetriebe dargestellt, das die gegebenen Bedingungen erfüllt. Diesem Beispiel sind folgende Zahlenwerte zugrunde gelegt:

$$\begin{aligned}\alpha &= 90°, & a &= 1{,}559\,6,\\ \beta &= 134°, & b &= 2{,}167\,6.\end{aligned}$$

Ferner zeigt das Bild die Abhängigkeit $\psi_k = f(\varphi_k)$ des Getriebes im Vergleich zu der gegebenen Parabelfunktion $\psi = \sqrt{\frac{\pi}{3}\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right)} - \frac{\pi}{6}$.

b) Vorgabe von fünf Bedingungen. Ist noch eine weitere Bedingung in Form eines Funktionspunktes oder einer Ableitung gegeben, so ist keine der Bemessungsgrößen des Gelenkviereckes mehr frei wählbar. Wird z. B. der Bestimmung des Gelenkviereckes von einer Funktion $\psi = f(\varphi)$ der Nullpunkt mit der 1. und 2. Ableitung in diesem Punkt, ein weiterer Punkt 1 und die 1. Ableitung in diesem Punkt zugrunde gelegt, so verwirklicht das ermittelte Gelenkviereck in der Funktion der Winkeldrehung seiner Lenker von der vorgegebenen Funktion die Steigung und Krümmung am Nullpunkt und den Punkt 1 sowie die Steigung in diesem Punkt. Nach (31)

und (65) können folgende, den gegebenen Bedingungen entsprechende Beziehungen aufgestellt werden:

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_0'(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_0'(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0'(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi)\,, \tag{165}$$

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_0''(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''(\psi) - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_0''(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi\psi) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0''(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi)\,, \tag{166}$$

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_1(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1(\psi) - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_1(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi)\,, \tag{167}$$

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_1'(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1'(\psi) - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_1'(\varphi\psi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{F}}_1'(\varphi\psi) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1'(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{F}}_1'(\varphi)\,. \tag{168}$$

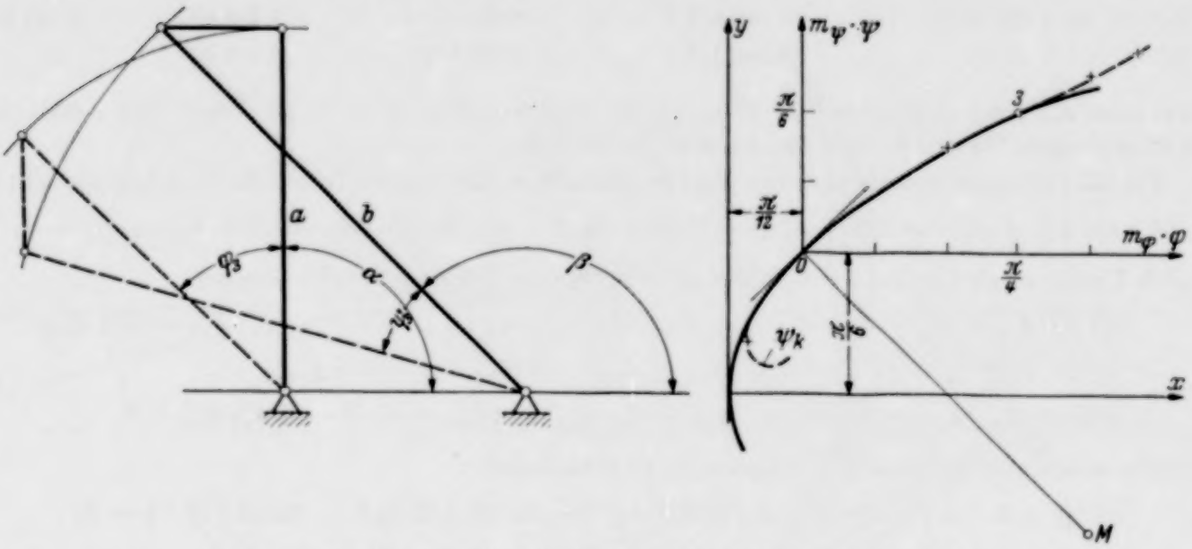


Abb. 19. Gelenkviereck nach dem fünften Zahlenbeispiel für $\Delta = 90°$ und $a = 1{,}56$.

Die Vereinigung dieser Gleichungen führt zu den Beziehungen (66) bis (69) mit folgender Bedeutung der vierstelligen Determinanten:

$$\mathfrak{d} = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_0''(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0''(\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_1(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_1'(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1'(\psi) & +\mathfrak{F}_1'(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1'(\varphi\psi) \end{vmatrix}, \tag{169}$$

$$\mathfrak{d}_1 = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\varphi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_0''(\varphi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0''(\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_1(\varphi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_1'(\varphi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1'(\psi) & +\mathfrak{F}_1'(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1'(\varphi\psi) \end{vmatrix}, \tag{170}$$

$$\mathfrak{d}_2 = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi) & +\mathfrak{F}_0(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_0''(\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_1'(\psi) & +\mathfrak{F}_1'(\varphi) & +\mathfrak{F}_1'(\varphi\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1'(\varphi\psi) \end{vmatrix}, \tag{171}$$

$$\mathfrak{d}_3 = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi) & -\bar{\mathfrak{F}}_0'(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_0''(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_0''(\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi) & -\bar{\mathfrak{F}}_0''(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_1(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) & -\bar{\mathfrak{F}}_1(\varphi\psi) \\ +\mathfrak{F}_1'(\psi) & +\bar{\mathfrak{F}}_1'(\psi) & +\mathfrak{F}_1'(\varphi) & -\bar{\mathfrak{F}}_1'(\varphi\psi) \end{vmatrix}, \tag{172}$$

$$\mathfrak{d}_4 = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & -\mathfrak{F}_0'(q\psi) & +\mathfrak{F}_0'(q) \\ +\mathfrak{F}_0''(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0''(\psi) & -\mathfrak{F}_0''(q\psi) & +\mathfrak{F}_0''(q) \\ +\mathfrak{F}_1(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_1(\psi) & -\mathfrak{F}_1(q\psi) & +\mathfrak{F}_0'(q) \\ +\mathfrak{F}_1'(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_1'(\psi) & -\mathfrak{F}_1'(q\psi) & +\mathfrak{F}_1'(q) \end{vmatrix}. \tag{173}$$

Da die Gleichungen (66) bis (69) auch hier mit der angegebenen Bedeutung der Determinanten Gültigkeit haben, gelten hierfür ebenfalls die daraus entwickelten Gleichungen (78), (81), (85), (86) und (87).

Sollen neben der ersten und zweiten Ableitung im Nullpunkt zwei weitere Punkte 1 und 2 (Abb. 3) entsprechen der Zuordnung φ_1, ψ_1 und φ_2, ψ_2 von dem Gelenkviereck verwirklicht werden, so ergeben sich nach (31) und (65) folgende vier Gleichungen:

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_0'(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\overline{\mathfrak{F}}_0'(\psi) - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_0'(q\psi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\overline{\mathfrak{F}}_0'(q\psi) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0'(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}_0'(\varphi), \tag{174}$$

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_0''(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\overline{\mathfrak{F}}_0''(\psi) - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_0''(q\psi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\overline{\mathfrak{F}}_0''(q\psi) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_0''(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}_0''(\varphi), \tag{175}$$

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_1(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\overline{\mathfrak{F}}_1(\psi) - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_1(q\psi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\overline{\mathfrak{F}}_1(q\psi) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_1(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}_1(\varphi), \tag{176}$$

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{F}_2(\psi) + \bar{\mathfrak{b}}\,\overline{\mathfrak{F}}_2(\psi) - \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{F}_2(q\psi) - \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\overline{\mathfrak{F}}_2(q\psi) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{F}_2(\varphi) + \bar{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{F}}_2(\varphi). \tag{177}$$

Durch Verbindung der vier Gleichungen (174) bis (177) ergeben sich die Beziehungen (66) bis (69) mit folgender Bedeutung der Determinanten:

$$\mathfrak{d} = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & +\mathfrak{F}_0'(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0'(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_0''(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0''(\psi) & +\mathfrak{F}_0''(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0''(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_1(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_1(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_2(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_2(\psi) & +\mathfrak{F}_2(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_2(q\psi) \end{vmatrix}, \tag{178}$$

$$\mathfrak{d}_1 = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\varphi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & +\mathfrak{F}_0'(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0'(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_0''(\varphi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0''(\psi) & +\mathfrak{F}_0''(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0''(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_1(\varphi) & +\overline{\mathfrak{F}}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_1(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_2(\varphi) & +\overline{\mathfrak{F}}_2(\psi) & +\mathfrak{F}_2(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_2(q\psi) \end{vmatrix}, \tag{179}$$

$$\mathfrak{d}_2 = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi) & +\mathfrak{F}_0'(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0'(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_0''(\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi) & +\mathfrak{F}_0''(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0''(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) & +\mathfrak{F}_1(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_1(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_2(\psi) & +\mathfrak{F}_2(\varphi) & +\mathfrak{F}_2(q\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_2(q\psi) \end{vmatrix}, \tag{180}$$

$$\mathfrak{d}_3 = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi) & -\overline{\mathfrak{F}}_0'(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_0''(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0''(\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi) & -\overline{\mathfrak{F}}_0''(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_1(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_1(\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) & -\overline{\mathfrak{F}}_1(q\psi) \\ +\mathfrak{F}_2(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_2(\psi) & +\mathfrak{F}_2(\varphi) & -\overline{\mathfrak{F}}_2(q\psi) \end{vmatrix}, \tag{181}$$

$$\mathfrak{d}_4 = \begin{vmatrix} +\mathfrak{F}_0'(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0'(\psi) & -\mathfrak{F}_0'(q\psi) & +\mathfrak{F}_0'(\varphi) \\ +\mathfrak{F}_0''(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_0''(\psi) & -\mathfrak{F}_0''(q\psi) & +\mathfrak{F}_0''(\varphi) \\ +\mathfrak{F}_1(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_1(\psi) & -\mathfrak{F}_1(q\psi) & +\mathfrak{F}_1(\varphi) \\ +\mathfrak{F}_2(\psi) & +\overline{\mathfrak{F}}_2(\psi) & -\mathfrak{F}_2(q\psi) & +\mathfrak{F}_2(\varphi) \end{vmatrix}. \tag{182}$$

Auch hier führt der weitere Entwicklungsgang, ausgehend von (66) bis (69) mit der in (178) bis (182) angegebenen Bedeutung der Determinanten zu (78), (81), (85), (86) und (87), aus denen die Abmessungen des Gelenkviereckes berechnet werden können.

Sechstes Zahlenbeispiel. Von der Funktion

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi}{3}\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right)} - \frac{\pi}{6} \qquad \text{[siehe (64)]}$$

(Abb. 11) soll das zu ermittelnde Gelenkviereck die 1. und 2. Ableitung im Nullpunkt, den Punkt 3 mit $\varphi_3 = 45°$ und $\psi_3 = 30°$ und die erste Ableitung in diesem Punkt verwirklichen. Hierfür ergibt sich nach (119)

$$\psi_3' = 0{,}5\,.$$

Aus (104), (108) und (112) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_3'(\varphi) &= -\sin 45° + i \cos 45°\,,\\
\mathfrak{F}_2'(\psi) &= (-\sin 30° + i \cos 30°)\cdot 0{,}5\,,\\
\mathfrak{F}_3'(\varphi\psi) &= (-\sin 15° + i \cos 15°)\cdot 0{,}5\,.
\end{aligned}$$

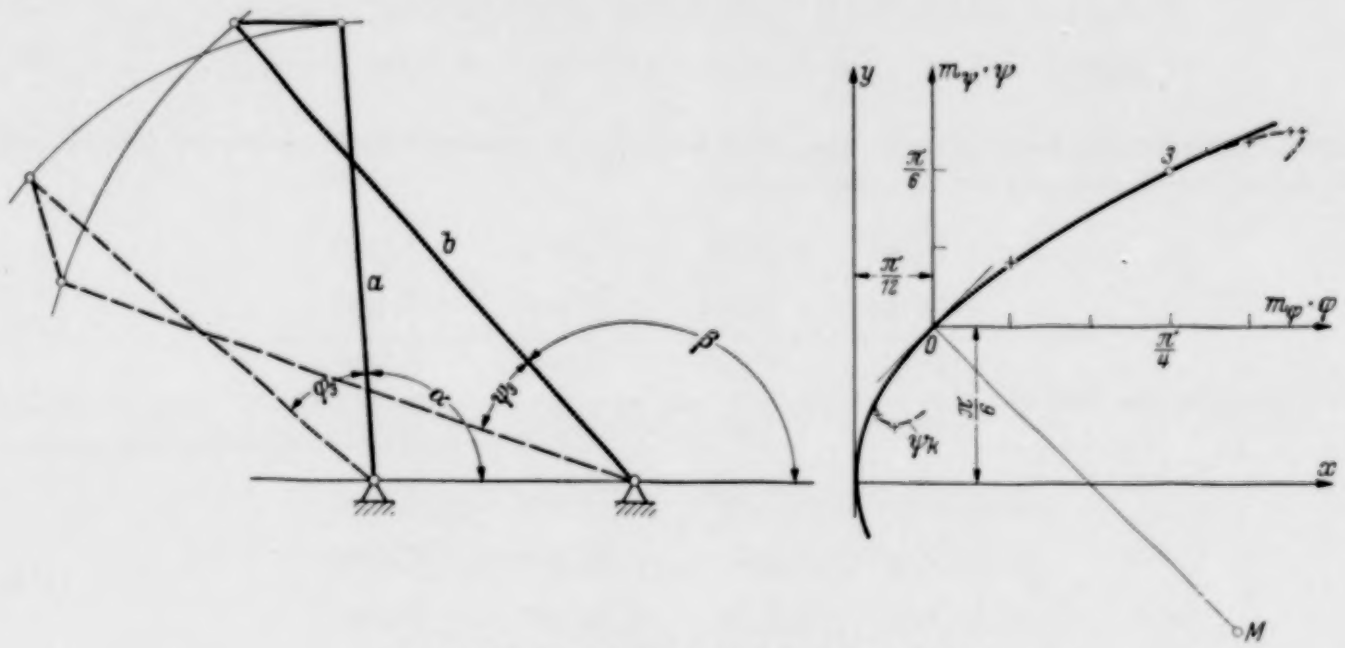


Abb. 20. Gelenkviereck nach dem sechsten Zahlenbeispiel.

Die $\mathfrak{F}$-Größen erhalten damit für diese Aufgabe folgende Werte, wobei die $\mathfrak{F}_0'$- und $\mathfrak{F}_0''$-Größen dem vierten Beispiel und die $\mathfrak{F}_2$-Größen dem zweiten Beispiel entnommen werden:

	$\mathfrak{F}(\varphi)$	$\mathfrak{F}(\psi)$	$\mathfrak{F}(\varphi\psi)$
$\mathfrak{F}_0'$	$0 \quad + i\,1$	$0 \quad + i\,1$	$0 \quad + i\,0$
$\mathfrak{F}_0''$	$-1 \quad + i\,0$	$-1 \quad - i\,1{,}909\,859$	$0 \quad + i\,1{,}909\,859$
$\mathfrak{F}_3$	$-0{,}292\,893\,2 + i\,0{,}707\,106\,8$	$-0{,}133\,974\,6 + i\,0{,}5$	$-0{,}034\,074\,2 + i\,0{,}258\,819\,0$
$\mathfrak{F}_3'$	$-0{,}707\,106\,8 + i\,0{,}707\,106\,8$	$-0{,}25 \quad + i\,0{,}433\,012\,7$	$-0{,}129\,409\,5 + i\,0{,}482\,962\,9$

Aus (169) bis (173) ergibt die Rechnung mit Benutzung von (88) bis (93) für die vierstelligen Determinanten folgende Werte:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d} &= -0{,}775\,862\cdot 10^{-3}\,,\\
\mathfrak{d}_1 &= (+18{,}284\,65 - i\;\;1{,}623\,258)\cdot 10^{-3}\,,\\
\mathfrak{d}_2 &= (+19{,}060\,51 - i\;\;1{,}623\,258)\cdot 10^{-3}\,,\\
\mathfrak{d}_3 &= (+\;\;2{,}183\,84 + i\,10{,}642\,28)\cdot 10^{-3}\,,\\
\mathfrak{d}_4 &= (-\;\;0{,}291\,88 - i\;\;9{,}317\,84)\cdot 10^{-3}\,.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (79) und (80) erhält man zur Ermittlung des Winkels α für die Größen $\mathfrak{D}_a$ und $\mathfrak{D}_b$ die Werte

$$\mathfrak{D}_a = D_{xa} + i\, D_{ya} = (-\,20{,}688\,70 - i\,177{,}129)\cdot 10^{-6}\,,$$
$$\mathfrak{D}_b = D_{xb} + i\, D_{yb} = (-\,23{,}067\,71 - i\,568{,}285)\cdot 10^{-6}\,.$$

Die kubische Gleichung (85) für $\operatorname{tg}\alpha$ erhält damit die Form

$$\operatorname{tg}^3\alpha + 15{,}510\operatorname{tg}^2\alpha + 35{,}785\operatorname{tg}\alpha + 313{,}33 = 0\,.$$

Die Auswertung nach dem *Horner*schen Schema führt zu der Lösung

$$\operatorname{tg}\alpha = -\,14{,}531\,, \qquad \alpha = 180^\circ - 86{,}06^\circ\,.$$

Die beiden weiteren Lösungen der kubischen Gleichung sind komplex und damit für diesen Zweck unbrauchbar.

Aus (86) ergibt die Rechnung für den Vektor $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a} = -\,0{,}121\,72 + i\,1{,}768\,67\,.$$

Damit erhält man mittels (6) und (7)

$$a = 1{,}772\,9 \quad \text{und} \quad \alpha = 180^\circ - 86{,}06^\circ = 93{,}94^\circ\,.$$

Der Vektor $\mathfrak{b}$ kann mittels (87) berechnet werden

$$\mathfrak{b} = -\,1{,}541{,}98 + i\,1{,}768\,67\,.$$

Größe und Richtung des Vektors $\mathfrak{b}$ ergibt sich dann aus (6) und (7) zu

$$b = 2{,}346\,5 \quad \text{und} \quad \beta = 180^\circ - 48{,}92^\circ = 131{,}08^\circ\,.$$

In Abb. 20 ist das Getriebe in der errechneten Berechnung dargestellt.

(Eingegangen am 10. November 1955)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *K.-H. Sieker*, Berlin-Schlachtensee, Niklasstraße 62

Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren

Von S. Falk

1. Einleitung; Ziel der Arbeit. In der Baustatik pflegt man statisch unbestimmte Tragwerke im allgemeinen nach der Eliminationsmethode mit Hilfe sogenannter „Grundsysteme" zu berechnen: entweder wird das Tragwerk durch Entfernen von Bindungen statisch bestimmt gemacht (Kraftmethode), oder durch zusätzliche Bindungen so festgehalten, daß es sich nicht mehr verformen kann (Deformationsmethode). In beiden Fällen sind die dabei auftretenden „überzähligen" Kraft- bzw. Deformationsgrößen aus linearen Gleichungssystemen nach dem *Gauß*schen Algorithmus oder anderen Verfahren (Iteration von *Biezeno*[1], Relaxation von *Cross*[2] usw.) zu ermitteln. Die Anzahl der Gleichungen, die in einfachen Fällen übersichtlich gebaut sind (Drei- bzw. Fünfmomentengleichungen und andere) wächst mit dem Grade der statischen Unbestimmtheit.

Nun ist die Einführung eines Grundsystems natürlich keineswegs zwingend; man kann ebenso gut Kraft- und Deformationsgrößen nebeneinander herführen, und da dann weder die einen noch die anderen aus dem Zusammenhang eliminiert werden, treten auch keine Überzähligen, somit auch keine Gleichungssysteme höherer Ordnung auf; der Grad der statischen Unbestimmtheit tritt bei diesem sogenannten „Reduktionsverfahren" überhaupt nicht in Erscheinung; wesentlich für die Berechnung werden vielmehr die topologischen Eigenschaften des Tragwerkes — die sich übrigens auch in den Gleichungssystemen der Eliminationsmethode widerspiegeln —, und zwar zeigt es sich, daß man beim durchlaufenden offenen Rahmen, als deren einfachsten Vertreter wir den geraden Balken mit n Feldern herausgreifen, auf Systeme von höchstens zwei linearen Gleichungen stößt.

In der vorliegenden Arbeit werden nun einfach gebaute fünfreihige Matrizen angegeben, mit denen sich die Kraft- und Deformationsgrößen eines beliebig starr oder elastisch gestützten Balkens leicht berechnen lassen. Biegesteifigkeit EJ und Belastung q brauchen nicht konstant zu sein. Einzige, auch sonst in der Baustatik übliche Voraussetzung ist, daß sämtliche Beziehungen linear sind, das *Hooke*sche Gesetz also im vollen Umfang gültig bleibt. An drei Beispielen wird das Verfahren vorgeführt und der Rechenaufwand mit dem der Eliminationsmethode verglichen.

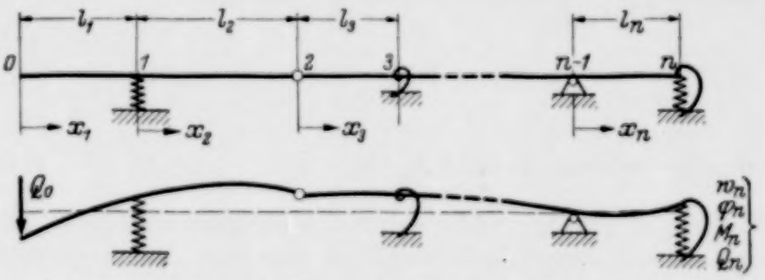


Abb. 1. Beliebig gestützter Durchlaufträger, am linken Ende durch eine Einzelkraft belastet.

2. Der Grundgedanke des Reduktionsverfahrens. Ein beliebig gestützter Balken mit n Feldern werde am linken Ende durch eine senkrechte Kraft Q_0 belastet (Abb. 1), dann sind Durchbiegung (Verschiebung) w_n, Neigung (Drehwinkel) φ_n, Biegemoment M_n und Querkraft Q_n am rechten Ende eindeutig bestimmt, und zwar als lineare Funktionen von Q_0, das heißt, die Kraft $k\,Q_0$ ruft auch die k-fachen Kraft- und Deformationsgrößen am rechten Balkenende hervor. Nun denken wir uns links außer Q_0 nacheinander ein Moment M_0, eine Verschiebung w_0 und einen Drehwinkel φ_0 — alles von beliebiger Größe —, und schließlich die über den ganzen Balken verteilte gegebene Belastung q angebracht: jedesmal sind Kraft- und Deformationsgrößen am rechten Ende festgelegt. Da nun die vier Konstanten w_0, φ_0, M_0 und Q_0 ganz willkürlich sind, lassen sich mit ihnen auch gerade die je nach der Lagerung an beiden Enden vorgeschriebenen zweimal zwei Randbedingungen erfüllen, und die eigentliche rechnerische Aufgabe besteht lediglich darin, den linearen Zusammenhang zwischen Kraft- und Deformationsgrößen an beiden Balkenenden herzustellen, was zweckmäßig mit Hilfe von Matrizen geschieht.

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 1, S. 280, 2. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.
[2] *H. Cross*, Trans. Am. Soc. civ. Eng. 96 (1932) S. 1.

Die hier geschilderte Methode ist im Prinzip nicht neu. Sie tritt uns in ihrer einfachsten Form schon im Ziehen einer Schlußlinie bei der zeichnerischen Integration entgegen und findet sich weiterhin in der gesamten angewandten Physik und Technik, so etwa bei *Holzer-Tolle*[1] (Schwingungen von Kurbelwellen), *H. Herzberger*[2] (Strahlengang durch Linsensysteme) und *Q. Koiter*[3] (Träger auf elastischen Stützen). Besonders in den letzten Jahren wurde der Gedanke des Reduktionsverfahrens durch einige, zum Teil voneinander unabhängige Arbeiten immer mehr in den Vordergrund gerückt, so vor allem von *E. Pestel*[4] und *H. Fuhrke*[5] (Schwingungen von Stabwerken) und von *W. Schnell*[6] und *K. Marguerre*[7] (Stabilitätsprobleme). Ferner wurde das Problem vom Verfasser[8] ganz allgemein mit Hilfe normierter Fundamentalsysteme von n linearen inhomogenen Differentialgleichungen m-ter Ordnung mit insgesamt $m \cdot n$ Rand- und Übergangsbedingungen behandelt und schließlich von *H. Schaefer*[9] von der *Jakobi-Hamilton*schen Theorie der linearen kanonischen Gleichungssysteme her aufgegriffen, wobei sich unter anderem bemerkenswerte Eigenschaften der bilinearen Kovariante ergaben, die sich auch für die praktische Rechnung heranziehen lassen.

3. Feld- und Leitmatrix. Die allgemeine Lösung der Biege-Differentialgleichung

$$[EJ_i(x_i)\, w''(x_i)]'' = q_i(x_i) \tag{1}$$

im i-ten Felde der Länge $l_i = x_i - x_{i-1}$ lautet mitsamt ihren ersten vier Ableitungen

$$\left.\begin{aligned}
w(x_i) \quad &\equiv w_i(x_i) = 1 \cdot w_{i-1} - x_i \cdot \varphi_{i-1} + f_i(x_i) \cdot M_{i-1} + g_i(x_i) \cdot Q_{i-1} + \tilde{w}_i(x_i) \cdot 1\,, \\
-w'(x_i) \quad &\approx \varphi_i(x_i) = 1 \cdot \varphi_{i-1} - f_i'(x_i) \cdot M_{i-1} - g_i'(x_i) \cdot Q_{i-1} + \tilde{\varphi}_i(x_i) \cdot 1\,, \\
EJ_i(x_i)\, w''(x_i) \quad &= M_i(x_i) = 1 \cdot M_{i-1} + x_i \cdot Q_{i-1} + \tilde{M}_i(x_i) \cdot 1\,, \\
[EJ_i(x_i)\, w''(x_i)]' \quad &= Q_i(x_i) = 1 \cdot Q_{i-1} + \tilde{Q}_i(x_i) \cdot 1\,, \\
[EJ_i(x_i)\, w''(x_i)]'' \quad &= q_i(x_i) = q_i(x_i) \cdot 1\,.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dabei wurde zur Abkürzung gesetzt

$$f_i'(x_i) = \int_0^{x_i} \frac{d\xi}{EJ_i(\xi)}\,, \qquad f_i(x_i) = \int_0^{x_i} f_i'(\xi)\, d\xi\,; \qquad g_i'(x_i) = \int_0^{x_i} \frac{\xi \cdot d\xi}{EJ_i(\xi)}\,, \qquad g_i(x_i) = \int_0^{x_i} g_i'(\xi)\, d\xi \tag{3}$$

und

$$\tilde{Q}(x)_i = \int_0^{x_i} q_i(\xi) \cdot d\xi, \quad \tilde{M}_i(x_i) = \int_0^{x_i} \tilde{Q}_i(\xi)\, d\xi\,; \quad -\tilde{\varphi}_i(x_i) = \int_0^{x_i} \frac{\tilde{M}_i(\xi)\, d\xi}{EJ_i(\xi)}\,, \quad -\tilde{w}_i(x_i) = \int_0^{x_i} \tilde{\varphi}_i(\xi)\, d\xi\,. \tag{4}$$

Die Vorzeichen sind nach Abb. 2 so gewählt, daß einer positiven Querkraft (einem positiven Biegemoment) am rechten Schnittufer auch eine positive Verschiebung (ein positiver Drehwinkel) entspricht. Für $x_i = 0$ verschwinden offenbar sämtliche Glieder außerhalb der Hauptdiagonale in (2), und man erkennt, daß die vier willkürlichen Integrationskonstanten w_{i-1}, φ_{i-1}, M_{i-1} und Q_{i-1} nichts anderes sind als Verschiebung, Drehwinkel, Biegemoment und Querkraft an der linken Feldgrenze. Die mit dem Zeichen ~ versehenen Größen $\tilde{w}_i$, $\tilde{\varphi}_i$, $\tilde{M}_i$ und $\tilde{Q}_i$ dagegen sind die von der gegebenen Belastung im Bereiche $0 < \xi < x_i$ herrührenden Anteile.

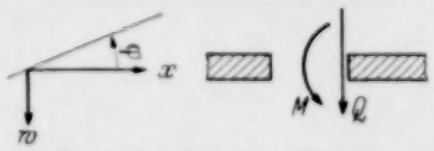


Abb. 2. Vorzeichen der Kraft- und Deformationsgrößen.

Fassen wir nun die fünf Größen w, φ, M, Q und 1 zum „Vektor" $\mathfrak{y}$ und die Koeffizienten des Gleichungssystems (2) zur „Feldmatrix" $\mathfrak{F}$ zusammen, so läßt sich nach Division der letzten Zeile durch $q_i(x_i)$ anstelle von (2) kurz schreiben:

$$\mathfrak{y}_i(x_i) = \mathfrak{F}_i(x_i)\, \mathfrak{y}_{i-1}\,. \tag{5}$$

[1] *M. Tolle*, Regelung der Kraftmaschinen, Berlin 1921.
[2] *H. Herzberger*, Strahlenoptik, S. 94, Berlin 1931.
[3] *Q. Koiter*, De Ingenieur 55 (1940) S. 57. Das Verfahren findet sich ausführlich beschrieben und mit einem Zahlenbeispiel versehen bei *Biezeno-Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 1, S. 268, 2. Aufl.
[4] *E. Pestel*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 6 (1954) S. 227.
[5] *H. Fuhrke*, Ing.-Arch. 23 (1955), S. 329.
[6] *W. Schnell*, Z. angew. Math. Mech. 35 (1955), S. 269.
[7] *K. Marguerre*, Forschungsbericht auf der GAMM-Tagung 1955 in Berlin.
[8] *S. Falk*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 7 (1955), S. 74.
[9] *H. Schaefer*, Vortrag auf dem Mechanik-Kollequium der Niedersächsischen Hochschulen am 3. 12. 1955 in Braunschweig.

Setzen wir hier den Wert $x_i = l_i$ ein, so wird an der rechten Feldgrenze

$$\mathfrak{y}_i(l_i) = \mathfrak{F}_i(l_i)\,\mathfrak{y}_{i-1} \tag{6}$$

oder auch

$$\mathfrak{y}_{ii} = \mathfrak{L}_i\,\mathfrak{y}_{i-1} \tag{7}$$

mit

$$\mathfrak{F}_i(l_i) \equiv \mathfrak{L}_i = \begin{pmatrix} 1 & -l_i & f_i(l_i) & g_i(l_i) & \tilde{w}_i(l_i) \\ 0 & 1 & -f_i'(l_i) & -g_i'(l_i) & \tilde{\varphi}_i(l_i) \\ 0 & 0 & 1 & l_i & \tilde{M}_i(l_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{Q}_i(l_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Diese sogenannte „Leitmatrix" $\mathfrak{L}_i$ stellt nach (7) den linearen Zusammenhang zwischen Kraft- und Deformationsgrößen an den Feldgrenzen $x_i = 0$ und $x_i = l_i$ her. Die darin auftretenden, durch die Gleichungen (3) und (4) definierten festen Zahlenwerte sind die an die rechte Feldgrenze reduzierten Funktionen q_i (Belastung), M_i/EJ_i („konjugierte Belastung"), $1/EJ_i$ und x_i/EJ_i. Man denkt sich also das i-te Feld links frei, rechts eingespannt (Abb. 3), trägt die Funktion $q_i(x_i)$ in geeignetem Maßstab auf und ermittelt den Flächeninhalt $\tilde{Q}_i(l_i)$ sowie das Moment ersten Grades $\tilde{M}_i(l_i)$, entweder rechnerisch oder mit Hilfe von Kraft- und Seileck. Ebenso verfährt man mit den anderen drei Funktionen. Im Gegensatz zum *Mohr*schen Analogieverfahren gibt es hier keine „zugeordneten Balken" mit vertauschten Auflagern; denn sämtliche Randbedingungen werden ja bereits durch die vier freien Konstanten in (2) erfaßt!

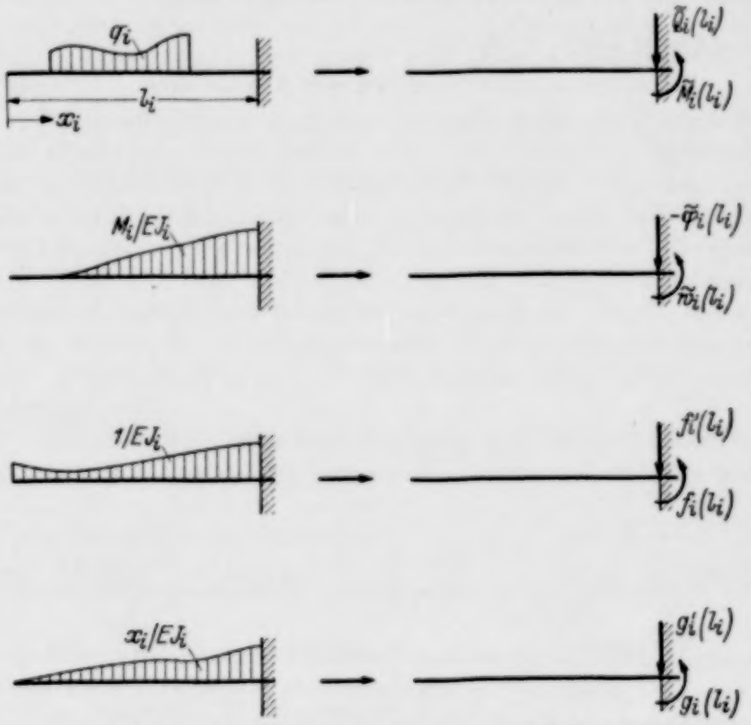


Abb. 3. Ermittlung der benötigten Funktionswerte durch Reduktion an die rechte Feldgrenze.

Falls die Biegesteifigkeit feldweise konstant ist, wird nach (3) einfach, wenn wir der Übersichtlichkeit halber noch den Index i herausziehen,

$$\mathfrak{L}_i = \begin{pmatrix} 1 & -l & l^2/2\,EJ & l^3/6\,EJ & \tilde{w}(l) \\ 0 & 1 & -l/EJ & -l^2/2\,EJ & \tilde{\varphi}(l) \\ 0 & 0 & 1 & l & \tilde{M}(l) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{Q}(l) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i, \quad EJ_i = \text{konst.} \tag{9}$$

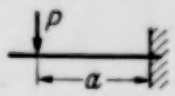
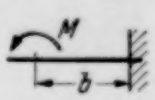
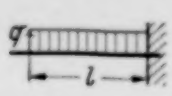
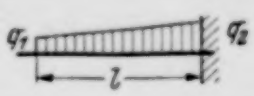
Die Werte der letzten Spalte dieser Matrix sind für die häufigsten Belastungsfälle in der Tabelle 1 zusammengestellt.

4. Die Übergangsmatrix. Die Matrix $\mathfrak{L}$ leitet die Werte $(w, \varphi, M, Q, 1) = \mathfrak{y}$ vom linken zum rechten Feldrande hinüber; wie aber geht nun der Übergang ins Nachbarfeld vonstatten? Vorerst sei der Balken nach Abb. 4 lediglich durch Federn und Drehfedern elastisch gestützt; deren Reaktionen sind dann nach dem *Hooke*schen Gesetz:

$$Q_{c_i} = -c_i\,w_i, \quad M_{C_i} = -C_i\,\varphi_i\,. \tag{10}$$

Die Federkonstanten c_i(to/m) und C_i(to m) sind entweder von vornherein gegeben oder aber aus anderen mechanischen Kenngrößen bei Queranschlüssen usw. zu berechnen. Sollten die (Dreh)-

Tabelle 1. *Belastungsgrößen für feldweise konstante Biegesteifigkeit EJ.*

				
$\tilde{w}(l) =$	$Pa^3/6\,EJ$	$Mb^2/2\,EJ$	$ql^4/24\,EJ$	$(4\,q_1 + q_2)\,l^4/120\,EJ$
$\tilde{\varphi}(l) =$	$-Pa^2/2\,EJ$	$-Mb/EJ$	$-ql^3/6\,EJ$	$-(3\,q_1 + q_2)\,l^3/24\,EJ$
$\tilde{M}(l) =$	Pa	M	$ql^2/2$	$(2\,q_1 + q_2)\,l^2/6$
$\tilde{Q}(l) =$	P	0	ql	$(q_1 + q_2)\,l/2$

federn in der unverbogenen Lage des Balkens nicht selbst entspannt sein, so gilt nach Abb. 5 anstelle von (10) allgemeiner:

$$Q_{e_i} = -c_i\,(w_i - W_i) = -c_i\,w_i + c_i\,W_i, \quad M_{C_i} = -C_i\,(\varphi_i - \Phi_i) = -C_i\,\varphi_i + C_i\,\Phi_i\,. \tag{11}$$

Man braucht also nur die konstanten gegebenen Größen $c_i\,W_i$ bzw. $C_i\,\Phi_i$ zur Belastung hinzuzuschlagen und rechnet dann so, als seien sämtliche Federn ohne Vorspannung; wir kümmern uns daher im folgenden nur noch um die Gleichung (10).

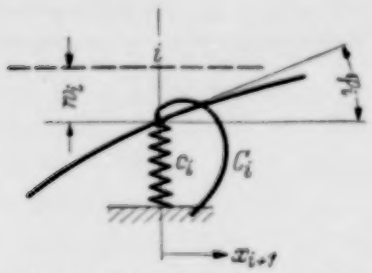


Abb. 4. Elastische Stütze mit Feder und Drehfeder.

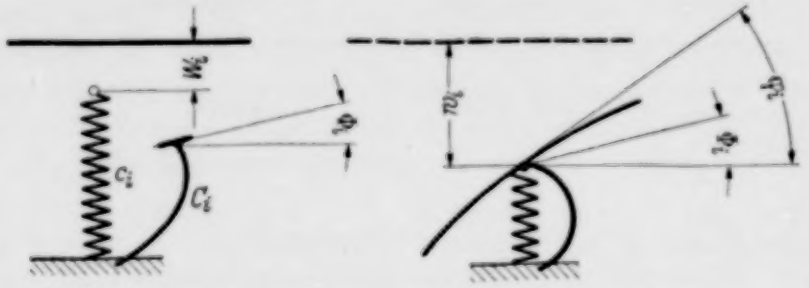


Abb. 5. Elastische Stütze mit vorgespannten Federn.

Nun können an einer Feldgrenze außer den elastischen Reaktionen auch noch andere Kraft- und Deformationsgrößen hinzutreten, die wir mit einem ^ versehen wollen. Die Gleichungen zwischen den Vektoren $\mathfrak{y}_i(l_i) \equiv \mathfrak{y}_{ii}$ und $\mathfrak{y}_{i+1}(0) \equiv \mathfrak{y}_{i+1}$ lauten dann unter Berücksichtigung von (10)

$$\left.\begin{aligned} w_{i+1} &= w_{ii} + \hat{w}_i\,, \\ \varphi_{i+1} &= \varphi_{ii} + \hat{\varphi}_i\,, \\ M_{i+1} &= -C_i\,\varphi_{ii} + M_{ii} + \hat{M}_i\,, \\ Q_{i+1} &= -c_i\,w_{ii} + Q_{ii} + \hat{Q}_i\,, \\ 1 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

oder kurz

$$\mathfrak{y}_{i+1} = \mathfrak{U}_i\,\mathfrak{y}_{ii} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \hat{w}_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \hat{\varphi}_i \\ 0 & -C_i & 1 & 0 & \hat{M}_i \\ -c_i & 0 & 0 & 1 & \hat{Q}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

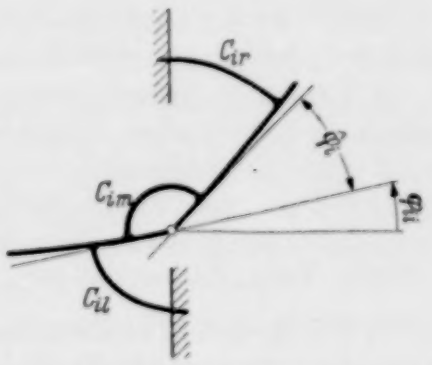


Abb. 6. Dreifach drehgefedertes Gerbergelenk.

In das Schema dieser „Übergangsmatrix" $\mathfrak{U}_i$ ordnen sich auch allgemeinere Bindungen ein, wie etwa das dreifach gefederte Gerbergelenk von Abb. 6. Wie man sich leicht überlegt, ist hier $C_i = C_{il} + C_{ir}$, $c_i = 0$ ferner $\hat{M}_i = -(C_{im} + C_{ir})\,\hat{\varphi}_i$, $\hat{w}_i = 0$ und $\hat{Q}_i = 0$ zu setzen.

5. Der Zusammenhang von Kraft- und Deformationsgrößen an den Trägerenden. Nach (13) und (7) ist nun zunächst

$$\mathfrak{y}_{i+1} = \mathfrak{U}_i\,\mathfrak{y}_{ii} = \mathfrak{U}_i\,\mathfrak{L}_i\,\mathfrak{y}_i\,, \tag{14}$$

also der Reihe nach eingesetzt

$$\mathfrak{y}_n = \underbrace{\mathfrak{U}_n\, \mathfrak{L}_n\, \mathfrak{U}_{n-1}\, \mathfrak{L}_{n-1} \quad \cdots \quad \mathfrak{U}_2\, \mathfrak{L}_2\, \mathfrak{U}_1\, \mathfrak{L}_1}\, \mathfrak{y}_0 \tag{15}$$

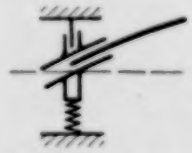
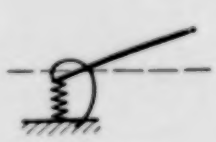
oder

$$\mathfrak{y}_n = \mathfrak{P}_n\, \mathfrak{y}_0 \,. \tag{16}$$

Und diese Produktmatrix $\mathfrak{P}_n$ stellt den gesuchten Zusammenhang zwischen Kraft- und Deformationsgrößen an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_n = l_n$ her. Man kann $\mathfrak{P}_n$ als Leitmatrix eines (gedachten) Balkens mit nur einem einzigen Feld ansehen, auf dessen Berechnung somit das ganze Problem zurückgeführt ist.

6. Äußere Randbedingungen. Von den vier willkürlichen Integrationskonstanten w_0, φ_0, M_0 und Q_0 sind, wie leicht einzusehen, stets zwei gleich Null infolge der beiden Randbedingungen links; mit den beiden übrigen, noch freien Konstanten aber lassen sich gerade die beiden Bedingungen am rechten Trägerende erfüllen. In der Tabelle 2 sind alle vorkommenden Randbedingungen zusammengestellt. In Sonderfällen können die (Dreh)federn fehlen, ebenso werden — außer bei der Stützung IV — Verschiebungen bzw. Drehwinkel an den Enden in der Regel gleich Null sein, doch ist das für das Verfahren selbst völlig belanglos.

Tabelle 2. *Äußere Randbedingungen.*

Art der Stützung	I. Einspannung	II. Festes Gelenk	III. Senkrechte Führung	IV. Freies (gefedertes) Ende
Freie Konstanten am linken Ende	M_0, Q_0	φ_0, Q_0	w_0, M_0	w_0, φ_0
Randbedingen am rechten Ende	$w_n = \text{const}$ $\varphi_n = \text{const}$	$w_n = \text{const}$ $M_n = 0$	$\varphi_n = \text{const}$ $Q_n = 0$	$M_n = 0$ $Q_n = 0$
Zeichnerisches Symbol				

Damit ist der ganze Rechnungsgang festgelegt, und wir haben nur noch nach der Beschaffenheit der Übergangsmatrix $\mathfrak{U}_i$ drei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. Sämtliche Sprunggrößen in der letzten Spalte der Übergangsmatrix sind von vornherein gegeben: Balken ohne Zwischenbedingungen.

2. Eine der Sprunggrößen ist zunächst unbekannt und erst im Laufe der Rechnung zu ermitteln: Balken mit Zwischenbedingungen.

3. Zwei der Sprunggrößen sind unbekannt; der Balken zerfällt dann in zwei voneinander unabhängige Teile. Dieser Fall ist daher für das Weitere ohne Interesse.

7. Der Balken ohne Zwischenbedingungen. Hierzu ist nach dem Vorangehenden kaum etwas zu sagen. Da sämtliche Elemente der Leit- und Übergangsmatrizen von Anfang an gegeben sind, läßt sich die Rechnung nach (15) und Tabelle 2 ohne weiteres durchführen und bietet keine Besonderheiten.

8. Der Balken mit Zwischenbedingungen. Wir stellen als erstes die vier überhaupt möglichen Arten von Zwischenbedingungen mit den zugehörigen Sprunggrößen in der Tabelle 3 zusammen. Selbstredend können alle diese Bindungen noch mit Federn und Drehfedern versehen sein (wie in Abb. 6); grundsätzliche Schwierigkeiten treten dabei nicht auf.

Um nun aus den Bedingungsgleichungen die unbekannten Sprunggrößen zu ermitteln, kann man drei verschiedene Wege einschlagen:

a) Das Ablösen der Konstanten. Soll an der Feldgrenze $x_i = l_i$, $x_{i+1} = 0$ die *k-te* Komponente y_{ik} des Vektors $\mathfrak{y}_i$ den festen Wert d_i annehmen (man denke zum Beispiel an eine bleibende

Tabelle 3. *Zwischenbedingungen mit zugehörigen Sprunggrößen.*

Bezeichnung	I. Festes Gelenk	II. Senkrechte Führung	III. Gerbergelenk	IV. Gabelverbindung
Bedingung	$w = \text{const}\ (=0)$	$\varphi = \text{const}\ (=0)$	$M = 0$	$Q = 0$
Sprunggröße (neue Konstante)	Querkraft $\hat{Q}$	Biegemoment $\hat{M}$	Drehwinkel $\hat{\varphi}$	Verschiebung $\hat{w}$
Zeichnerisches Symbol				

Stützensenkung der Größe d_i, dann muß die erste Komponente $w_i = d_i$ sein), so berechnet man zunächst y_{ik} als lineare Funktion der beiden bis dahin freien Konstanten A und B:

$$y_{ik} = \alpha A + \beta B + \gamma = d_i \tag{17}$$

und kann daraus eine der Konstanten, etwa B, durch die andere ausdrücken. Als Ersatz tritt nach Tabelle 3 eine neue freie Konstante (im angenommenen Beispiel die Auflager[Quer-]kraft $\hat{Q}_i$) hinzu, und die Rechnung verläuft mit A und $\hat{Q}_i$ weiter wie bisher. Bei mehreren Zwischenbedingungen empfiehlt es sich, eine der beiden Anfangskonstanten aus Tabelle 2 zur Hauptkonstante zu erklären und diese bis zum Schluß beizubehalten, während die Nebenkonstanten wieder abgelöst werden.

b) Das abgekürzte Verfahren. Die unter a) beschriebene Methode läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn bereits an der unmittelbar benachbarten Feldgrenze $i+1$ infolge der Zwischenbedingung $y_{i+1,k} = d_{i+1}$ eine gerade hinzugetretene neue Konstante (etwa $\hat{Q}_i$) wieder abgelöst werden muß. Dann nämlich kann man auf deren Berechnung ganz verzichten, sie sich von vornherein linear zerlegt denken in der Form

$$\hat{Q}_i = a_i \cdot A + b_i \cdot 1\,, \tag{18}$$

wo A die Hauptkonstante sei, und die unbekannten Vorzahlen a_i und b_i so bestimmen, daß die Zwischenbedingung in folgender Weise erfüllt wird:

$$y_{i+1,k} = 0 \cdot A + d_{i+1} \cdot 1 = d_{i+1}\,. \tag{19}$$

Denn die Größe von A ist ja noch völlig offen; also muß der Faktor bei A verschwinden (Gleichung für a_i), der Faktor bei 1 jedoch den Wert d_{i+1} annehmen (Gleichung für b_i). Sind an allen Feldgrenzen des Balkens Zwischenbedingungen vorgeschrieben (wie beim Clapeyronträger oder im Beispiel 3), so läßt sich die ganze Rechnung sogar allein mit der Hauptkonstante bewältigen, und die beiden Randbedingungen rechts sind obendrein entkoppelt. Falls von Interesse, lassen sich die unterdrückten Sprunggrößen (Nebenkonstanten) nachträglich leicht ermitteln.

c) Das erweiterte Verfahren. Für manche Zwecke, insbesondere für die Programmierung von Rechenautomaten, kann es vorteilhaft sein, außer den beiden Anfangskonstanten auch noch sämtliche Sprunggrößen als Unbekannte bis zum Schluß der Rechnung mitzunehmen und dann erst die äußeren Randbedingungen gemeinsam mit den Zwischenbedingungen zu erfüllen. Das so entstehende Gleichungssystem hat stets eine Matrix der sogenannten „Hessenbergform" (20) und ist bequem rekursiv auflösbar:

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{m1} & h_{m2} & h_{m3} & h_{m4} & \cdots\cdots & h_{mm} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

9. Die praktische Durchführung des Verfahrens. So nützlich die Trennung in Leit- und Übergangsmatrizen für rein theoretische Fragen ist, wird man doch vor der eigentlichen Rechnung das Produkt $\mathfrak{U}_i \mathfrak{L}_i$ ausmultiplizieren und die grundlegende Gleichung (14) in der besonders für Rechenautomaten geeigneten Form (21) anschreiben:[1]

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -l & f & g & \tilde{w}+\hat{w} \\ 0 & 1 & -f' & -g' & \tilde{\varphi}+\hat{\varphi} \\ 0 & -C & 1+Cf' & l+Cg' & \tilde{M}+\hat{M} \\ -c & cl & -cf & 1-cg & \tilde{Q}+\hat{Q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i}_{\mathfrak{U}_i \mathfrak{L}_i} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ Q_i \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{y}_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_{i+1} \\ \varphi_{i+1} \\ M_{i+1} \\ Q_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{y}_{i+1}} \tag{21}$$

$$\mathfrak{U}_i \mathfrak{L}_i \qquad \mathfrak{y}_i = \mathfrak{y}_{i+1}. \tag{14}$$

Für die Rechnung von Hand aber empfiehlt sich folgendes Schema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -l & f & g & \tilde{w}+\hat{w} \\ 0 & 1 & -f' & -g' & \tilde{\varphi}+\hat{\varphi} \\ 0 & 0 & 1 & l & \tilde{M}+\hat{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{Q}+\hat{Q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i \cdot \begin{pmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ Q_i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -C_i \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ -c_i \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} w_{i+1} \\ \varphi_{i+1} \\ M_{i+1} \\ Q_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Man setzt also die Federkonstanten c_i und C_i zunächst gleich Null. Dann unterscheidet sich die Produktmatrix $\mathfrak{U}_i \mathfrak{L}_i$ von der Leitmatrix $\mathfrak{L}_i$ lediglich durch die fünfte Spalte, in der jetzt die Summen $\tilde{w}_i + \hat{w}_i$ usw. auftreten; mit anderen Worten: wir schlagen von Anfang an die Sprunggrößen ($\hat{}$) zu den Belastungsanteilen ($\tilde{}$) hinzu, betrachten somit alle an der Feldgrenze selbst anzubringenden Kraft- und Deformationsgrößen als zum linken Feld gehörig; die Kräfte und Momente fügen sich dann mit $a = 0$ bzw. $b = 0$ zwanglos in das Schema von Tabelle 1 ein. Die Gleichungen (10) aber erfüllen wir nachträglich direkt an den bereits berechneten Größen w_{i+1} und φ_{i+1}, wie in (22) durch die Pfeile angedeutet; der praktische Gewinn gegenüber (21) ist erheblich!

Für die Zahlenrechnung denken wir uns nun mittels zweier geeigneter Vergleichsgrößen P^* (Kraft) und l^* (Länge) alle vorkommenden Werte dimensionslos gemacht, wollen diese jedoch nicht durch eine besonders Schreibweise von den wirklichen dimensionsrichtigen Größen unterscheiden, so daß also Ausdrücke wie $\varphi_0 + 3\,M_0 = 2\,P$ durchaus ihren Sinn haben. Es empfiehlt sich im allgemeinen, mit der hundertfachen Belastung zu rechnen und $P^* = 100$ to, $l^* = 1$ m zu wählen, dann bleiben alle auftretenden Zahlen in vernünftigen Grenzen, und zum Schluß sind von sämtlichen Kraft- und Deformationsgrößen einfach zwei Dezimalstellen abzustreichen. Bei Tragwerken mit lauter gleichen Feldlängen l und Biegesteifigkeiten EJ (und wohl auch sonst) werden Kenngrößen und Belastung auf das Tragwerk selbst bezogen, indem man $l^* = l$ und $P^* = 6\,EJ/l^2$ setzt.

Soll jetzt eine beliebige Matrix $\mathfrak{R}$ mit einer Reihe von Vektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \ldots$ multipliziert werden, so schreibt man diese rechts oberhalb von $\mathfrak{R}$ als senkrechte Spalten hin und genau darunter, also rechts neben $\mathfrak{R}$, die Produktvektoren $\mathfrak{R}\,\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{R}\,\mathfrak{r}_2 \ldots$:

$$\begin{matrix} & (\mathfrak{r}_1) & (\mathfrak{r}_2) & \cdots \\ (\mathfrak{R}) & (\mathfrak{R}\,\mathfrak{r}_1) & (\mathfrak{R}\,\mathfrak{r}_2) & \cdots \end{matrix} \tag{23}$$

Jede Komponente z irgendeines der Vektoren $\mathfrak{R}\mathfrak{r}_i$ ist dann einfach gleich dem skalaren (inneren) Produkt aus der links neben z stehenden Zeile von $\mathfrak{R}$ und dem darüber stehenden Spaltenvektor $\mathfrak{r}_i$. Steht eine Rechenmaschine zur Verfügung, so läßt man diese skalaren Produkte im Ergebniswerk auflaufen, und zwar ohne Ablesen und Niederschreiben der Teilprodukte[2]).

Nun hat der Anfangsvektor $\mathfrak{y}_0$ in (16) stets die Form

$$\mathfrak{y}_0 = A \cdot \mathfrak{r}_1 + B \cdot \mathfrak{r}_2 + 1 \cdot \mathfrak{r}_3, \tag{24}$$

[1] Diese ausmultiplizierte Form benutzen z. B. *E. Pestel*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 6 (1954), S. 227 und *Unger-Schäfer*, Hausmitteilungen der Remington-Rand-GmbH. Frankfurt/Main, Heft 159, Januar 1954.

[2] Einzelheiten dazu bei *R. Zurmühl*, Matrizen, S. 256, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

wo A und B die freien Konstanten nach Tabelle 2 sind. Ziehen wir diese Konstanten nach oben heraus und lassen noch sämtliche Pluszeichen zwischen den $\mathfrak{r}_i$ und ihren Produktvektoren $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{r}_i$ usw. fort, so hat das gesamte Rechenschema das folgende Aussehen:

$$\begin{array}{cccccc} A & B & 1 & & & \\ (\mathfrak{r}_1) & (\mathfrak{r}_2) & (\mathfrak{r}_3) & & \rightarrow & \mathfrak{y}_0 \\ (\mathfrak{L}_1)\ (\downarrow) & (\downarrow) & (\downarrow) & \curvearrowright & \rightarrow & \mathfrak{y}_1 \\ (\mathfrak{L}_2)\ (\downarrow) & (\downarrow) & (\downarrow) & \curvearrowright & \rightarrow & \mathfrak{y}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & & \\ (\mathfrak{L}_n)\ (\downarrow) & (\downarrow) & (\downarrow) & \curvearrowright & \rightarrow & \mathfrak{y}_n . \end{array} \tag{25}$$

Als erstes werden die Vektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ unabhängig voneinander in drei senkrechten Kolonnen der Reihe nach mit den Leitmatrizen $\mathfrak{L}_1 \ldots \mathfrak{L}_n$ multipliziert (senkrechte Pfeile), wobei die Federkonstanten c_i und C_i (gebogene Pfeile) nebenher mit eingeflochten werden. Rechts unten neben $\mathfrak{L}_n$ erscheint dann schließlich der Vektor $\mathfrak{y}_n$, noch zerlegt in seine drei Anteile. Nun bestimmt man aus den Randbedingungen am rechten Balkenende die Konstanten A und B, multipliziert mit ihnen die ersten beiden Kolonnen und addiert diese nach (24) zur dritten (waagerechte Pfeile), womit dann alle Kraft- und Deformationsgrößen zahlen- und dimensionsrichtig in Form der Vektoren $\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ gegeben sind. Jeder der überhaupt benötigten, aus den Kenngrößen des Trägers und seiner Belastung gebildeten Funktionswerte (3) und (4) erscheint in dem Schema (25) nur ein einziges Mal an genau vorgeschriebener Stelle, wodurch das Mindestmaß an Schreib- und Rechenarbeit gewährleistet ist. Auch das Vorhandensein von Zwischenbedingungen beeinträchtigt die Geschlossenheit dieser übersichtlichen Anordnung kaum. Der Vollständigkeit halber bemerken wir noch, daß die ersten beiden Kolonnen allein von den Längen, Biegesteifigkeiten und Federkonstanten des Trägers abhängen, während die dritte Kolonne außerdem eine Funktion der gegebenen Belastung ist. Oder mathematisch gesprochen: die beiden ersten Kolonnen stellen zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen, die dritte dagegen eine Partikularlösung der inhomogenen Differentialgleichung (1) dar.

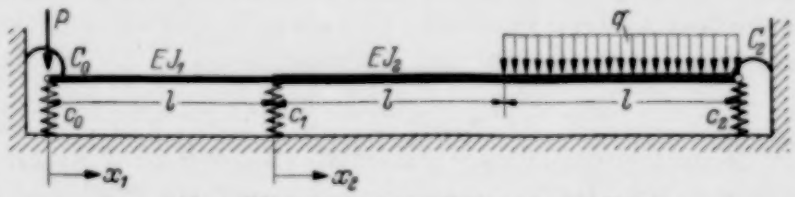


Abb. 7. Elastisch gestützter Träger mit zwei Feldern.

Die ganze Rechnung wird mit Hilfe der üblichen Summenproben dauernd überwacht. Eine weitere Kontrollmöglichkeit bietet die aus irgend zwei linear unabhängigen (und mechanisch verträglichen) Lösungsvektoren der homogenen Gleichung (1) gebildete bilineare Kovariante B_{12}, die, wie *H. Schaefer*[1] gezeigt hat, an jeder Stelle des Trägers, also auch an den Feldgrenzen, den konstanten Wert Null hat:

$$\begin{aligned} B_{12} &= \underbrace{w_1 Q_2 - w_2 Q_1}_{\Delta_{14}} + \underbrace{\varphi_1 M_2 - \varphi_2 M_1}_{\Delta_{23}} = 0 . \\ &= \Delta_{14} + \Delta_{23} = 0 . \end{aligned} \tag{26}$$

Greift man daher aus den ersten beiden Kolonnen des Schemas (25) irgend zwei nebeneinander stehende Vektoren heraus, so muß die Summe der beiden aus den Zeilen 1 und 4 bzw. 2 und 3 bestehenden zweireihigen Determinanten verschwinden. Und schließlich — eine letzte Kontrolle — überzeugt man sich nach beendeter Rechnung, ob das aus der gegebenen Belastung und den nun bekannten Reaktionen bestehende Kräftesystem im Gleichgewicht ist, wie es sein muß.

10. Beispiele. An drei einfachen, leicht nachzurechnenden Beispielen führen wir nun das Verfahren praktisch vor.

Erstes Beispiel. Für den elastisch gestützten Balken der Abb. 7 sind Querkraft- und Momentenverlauf zu ermitteln. Gegebene Werte:

$$l_1 = 1\ \text{m},\ EJ_1 = \frac{50}{3}\ \text{t m}^2,\ c_0 = 20\ \text{t/m},\ C_0 = 10\ \text{t m},\ P = 0{,}5\ \text{t},$$

$$l_2 = 2\ \text{m},\ EJ_2 = \frac{200}{3}\ \text{t m}^2,\ c_1 = 100\ \text{t/m},\ C_1 = 0,\ q = 16\ \text{t/m},$$

$$c_2 = 50\ \text{t/m},\ C_2 = 50\ \text{t m} .$$

[1] *H. Schaefer*, a. a. O.

Rechnen wir mit der hundertfachen Belastung und wählen als Vergleichsgrößen $l^* = 1$ m und $P^* = 100$ t, so wird

$$\left.\begin{aligned} l_1 = l^*,\quad EJ_1 = \frac{1}{6} P^* l^{*2},\ c_0 = 0{,}2\ P^*/l^*,\ C_0 = 0{,}1\ P^* l^*,\ 100\ P = 0{,}5\ P^*, \\ l_2 = 2\,l^*,\ EJ_2 = \frac{2}{3} P^* l^{*2},\ c_1 = 1{,}0\ P^*/l^*,\ C_1 = 0,\qquad 100\ q = 16\ P^*/l^*, \\ c_2 = 0{,}5\ P^*/l^*,\ C_2 = 0{,}5\ P^* l^*. \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

Von jetzt ab benutzen wir nur noch die reinen Zahlenwerte, setzen also $l_1 = 1$, $EJ_2 = 2/3$, $C_2 = 0{,}5$ usw. Damit lassen sich nach (9) und Tabelle 1 die Leitmatrizen $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ mitsamt ihren (klein gedruckten) Zeilensummen leicht hinschreiben. Zum Beispiel ist das zweite Element $\tilde{\varphi}_2(l_2)$ in der fünften Spalte von $\mathfrak{L}_2$ nach Tabelle 1, Spalte 3:

$$\tilde{\varphi}_2(l_2) = -\frac{q\,l^3}{6\,EJ_2} = -\frac{16\ P^*/l^* \cdot l^3}{6 \cdot 2\ P^* l^{*2}/3} = -4\,.$$

Der Anfangsvektor $\mathfrak{y}_0$ ist hier

$$\mathfrak{y}_0 \equiv \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ -C_0\varphi_0 \\ -c_0 w_0 + P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot w_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0{,}1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \varphi_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 = w_0 \mathfrak{r}_1 + \varphi_0 \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3 \tag{1b}$$

mit den beiden freien Konstanten w_0 und φ_0 (Tabelle 2, Spalte IV). Die Pluszeichen lassen wir der Einfachheit halber fort und multiplizieren die drei Vektoren $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ nacheinander mit der Leitmatrix $\mathfrak{L}_1$ (siehe Zahlenschema). Z. B. wird das aus der ersten Zeile von $\mathfrak{L}_1$ und dem Vektor $\mathfrak{r}_1$ gebildete skalare Produkt: $1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-0{,}2) + 0 \cdot 0 = 0{,}8$. Die Summenproben sind gut, auch die bilineare Kovariante ist nach (26) gleich Null

$$B_{12} = \Delta_{14} + \Delta_{23} = (0{,}8 \cdot 0 - 0{,}2 \cdot 1{,}3) + (-0{,}6 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 1{,}6) = 0\,.$$

Beim Übergang vom ersten ins zweite Feld wird nach (10) w_1 mit $-c_1$ mulitpliziert und zu Q_1 addiert, was der mit $-c_1 = -1$ bezifferte Pfeil andeutet. Da die Drehfeder fehlt, ist $C_1 = 0$. Damit sind Kraft- und Deformationsgrößen an der Stelle $x_2 = 0$ unmittelbar rechts von der Feldgrenze als Komponenten des Vektors $\mathfrak{y}_1$ bekannt.

Jetzt bilden wir das Produkt $\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{y}_1$ (z. B. wird die zweite Komponente in der dritten Kolonne: $0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot (-1{,}5) + (-3) \cdot (0{,}5) + (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot 1 = -7$) und addieren die mit $-c_2 = -0{,}5$ $(-C_2 = -0{,}5)$ multiplizierte erste (zweite) Zeile zur vierten (dritten), womit auch $\mathfrak{y}_2$ ermittelt ist, natürlich immer noch, wie auch $\mathfrak{y}_0$ und $\mathfrak{y}_1$ in seine drei Anteile aufgespalten.

Die Randbedingungen am rechten Balkenende lauten $M_3 = 0$, $Q_3 = 0$ (Tabelle 2), das sind, noch einmal ausführlich hingeschrieben, die beiden im Zahlenschema eingerahmten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -4{,}3\ w_0 + 3{,}5\ \varphi_0 + 12 = 0\,, \\ 0{,}5\ w_0 + 2{,}4\ \varphi_0 + 13 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1c}$$

mit den Lösungen

$$w_0 = -\frac{16{,}7}{12{,}07} = -1{,}3836\,,\quad \varphi_0 = -\frac{61{,}9}{12{,}07} = -5{,}1284\,. \tag{1d}$$

Nun multiplizieren wir die erste Kolonne mit w_0, die zweite mit φ_0, addieren darauf beide zur dritten und ziehen die Summen nach rechts heraus (waagerechte Pfeile). So wird etwa die Querkraft Q_1 als vierte Komponente von $\mathfrak{y}_1$:

$$Q_1 = -1 \cdot w_0 + 1{,}3\,\varphi_0 + 0 = -1 \cdot (-1{,}3836) + 1{,}3 \cdot (-5{,}1284) = -5{,}2833\,.$$

Damit sind die Vektoren $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ berechnet. Ihre Komponenten sind der Reihe nach mit l^*, 1, $P^* l^*$, P^* und 1 zu multiplizieren und außerdem durch 100 zu dividieren, da wir ja von der hundertfachen Belastung ausgegangen waren. Die Dimensionen der Deformations- und Kraftgrößen sind demnach für

Verschiebungen: $l^*/100 = 1$ cm, Drehwinkel: $1/100 = 0{,}01$,
Biegemomente: $P^* l^*/100 = 1$ t m, Querkräfte: $P^*/100 = 1$ t,

$$
\begin{array}{lc}
 & \begin{matrix} w_0 & \varphi_0 & 1 \end{matrix} \\
\text{Zahlenschema zum Beispiel 1} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad \rightarrow \begin{pmatrix} -1{,}3836 \\ -5{,}1248 \\ 0{,}5125 \\ 0{,}7767 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{y}_0
$$

$$
\mathfrak{L}_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0{,}8 & -1{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 1{,}6 & -1{,}5 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}5 \\ -0{,}2-0{,}8 & 0+1{,}3 & 0{,}5-0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ -1 \\ \\ \end{matrix}
\rightarrow \begin{pmatrix} 6{,}0601 \\ -10{,}5356 \\ 1{,}2896 \\ -5{,}2833 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{y}_1
$$

$$
\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0{,}2 & 1 \end{matrix}
$$

$$
\mathfrak{L}_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -3 & -2{,}2 & 6 \\ 4{,}2 & -2 & -7 \\ -2{,}2 & -2{,}1 \quad 2{,}5+1 & 8{,}5+3{,}5 \\ -1 & +1{,}5 \quad 1{,}3+1{,}1 & 16-3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ -0{,}5 \\ \\ \end{matrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ -0{,}5 \\ \\ \end{matrix}
\rightarrow \begin{pmatrix} 21{,}4333 \\ -2{,}5543 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{y}_2
$$

$$
\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 22 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -2 & -0{,}4 & 24{,}5 \end{matrix} .
$$

also z. B. unmittelbar rechts von der mittleren Stütze ($x_2 = 0$):

$w_1 = 6{,}0601$ cm,
$\varphi_1 = -0{,}105356$
$(= -6{,}04°)$,
$M_1 = 1{,}2896$ t m,
$Q_1 = -5{,}2833$ t.

Mit den Verschiebungen und Drehwinkeln sind jetzt nach (10) auch die Federreaktionen bekannt, die zusammen mit der gegebenen Belastung im Gleichgewicht sind, wovon man sich leicht überzeugt (Abb. 8). Querkraft- und Momentenverlauf sind nun mühelos einzuzeichnen (Abb. 9 und 10), auch die Biegelinie läßt sich mit Hilfe der drei berechneten Verschiebungen und Drehwinkel hinreichend genau skizzieren (Abb. 8), wenn man sie nicht nach Gleichung (2), erste Zeile, exakt berechnen will.

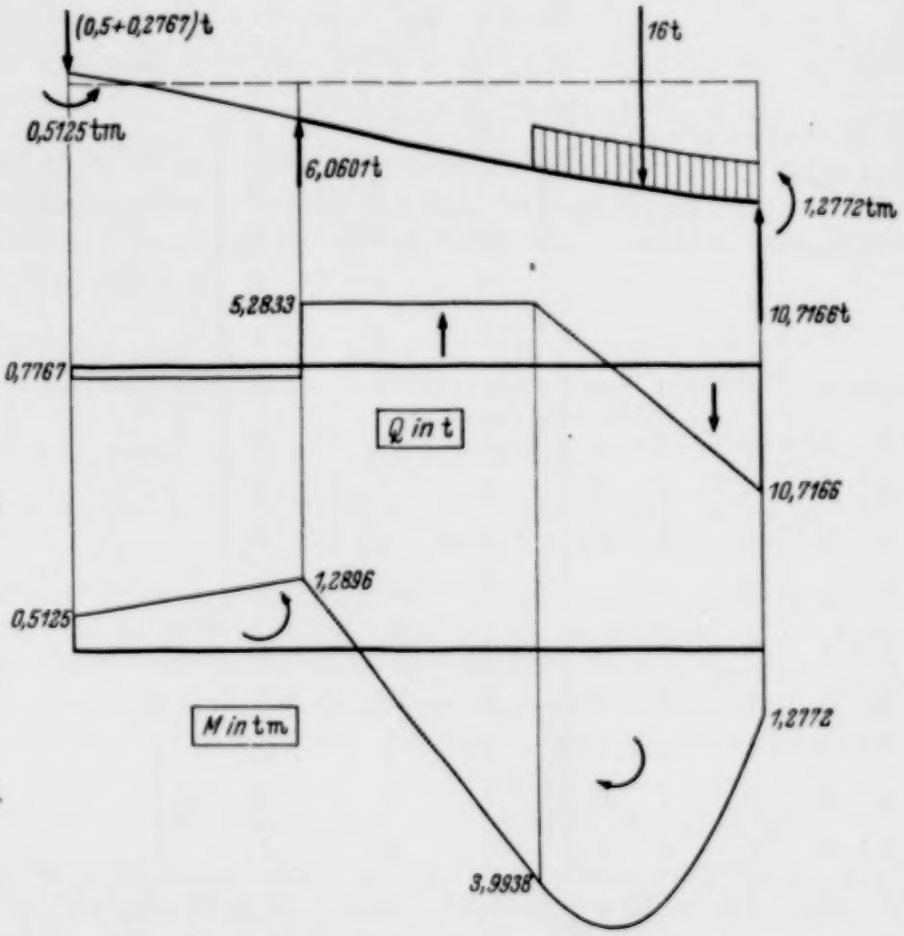


Abb. 8.
Abb. 9.
Abb. 10.

Abb. 8. Biegelinie und Gleichgewichtssystem am Träger der Abb. 7.
Abb. 9. Querkraftverlauf für den Träger der Abb. 7.
Abb. 10. Momentenverlauf für den Träger der Abb. 7.

Zweites Beispiel. Für den mit drei Einzelkräften besetzten Träger der Abb. 11 ist die Einflußmatrix zu berechnen. Die elastische Stütze c_2 soll erst nachträglich eingebaut werden.

Gegebene Werte:

$$l_1 = l, \quad EJ_1 = 2\,EJ, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 12\,EJ/l^3, \quad c_2 \text{ beliebig}, \quad c_3 = 0,$$
$$l_2 = l, \quad EJ_2 = 2\,EJ, \quad C_0 = 0, \quad C_1 = 12\,EJ/l, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0,$$
$$l_3 = l/2, \quad EJ_3 = EJ.$$

Als Vergleichsgrößen wählen wir $l^* = l$ und $P^* = 12\,EJ/l^2$ und berechnen nach (9) die drei Leitmatrizen; z. B. wird das vierte Element der ersten Zeile von $\mathfrak{L}_3$

$$\frac{l_3^3}{6\,EJ_3} = \frac{(l/2)^3}{6\,EJ} = \frac{l^3}{48}\,\frac{1}{EJ} = \frac{l^{*3}}{48}\,\frac{12}{P^* l^{*2}} = 0{,}25\,\frac{l^*}{P^*}.$$

Die Größen l^* und P^* lassen wir im Folgenden wieder fort, schreiben also einfach 0,25. Da die Kräfte P_1, P_2, P_3 an den Feldgrenzen selbst angreifen, ist in Tabelle 1, Spalte 1, $a = 0$ zu setzen.

Der Anfangsvektor ist wegen $w_0 = 0$, $M_0 = 0$ (Tabelle 2)

$$\mathfrak{y}_0 \equiv \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ Q_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + Q_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi_0\,\mathfrak{r}_1 + Q_0\,\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3;$$

seine drei Anteile $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ werden kolonnenweise mit den Leitmatrizen multipliziert, ferner sind beim Übergang vom ersten ins zweite Feld die beiden Federkonstanten c_1 und C_1 zu berücksichtigen. (Die in der Abb. 11 gestrichelt eingezeichnete Feder c_2 lassen wir vorläufig fort.) Die beiden im Schema eingerahmten Randbedingungen lauten ausführlich

$$\left.\begin{aligned} M_3 &= 0{,}5\,\varphi_0 + 4\,Q_0 + 1{,}5\,P_1 + 0{,}5\,P_2 = 0, \\ Q_3 &= \varphi_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

Zahlenschema zum Beispiel 2

$$\begin{array}{c} \\ \\ \mathfrak{L}_1 \\ \\ \mathfrak{L}_2 \\ \\ \mathfrak{L}_3 \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \varphi_0 \quad Q_0 \quad 1 \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & P_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & P_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0-1 & 1+3 & 0 \\ 0+1 & 1-1 & P_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} -4 & 16 & P_1 \\ 4 & -27 & -3\,P_1 \\ 0 & 4 & P_1 \\ 1 & 0 & P_1+P_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} -5{,}75 & 35{,}5 & 4{,}25\,P_1+0{,}25\,P_2 \\ 2{,}5 & -51 & -10{,}5\,P_1-1{,}5\,P_2 \\ \boxed{0{,}5} & \boxed{4} & \boxed{1{,}5\,P_1+0{,}5\,P_2} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{P_1+P_2+P_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0{,}75\,P_1+P_2+1{,}125\,P_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} P_1+4\,P_2+6\,P_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1{,}125\,P_1+6\,P_2+10{,}1875\,P_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ = \mathfrak{y}_0 \\ \\ = \mathfrak{y}_1 \\ \\ = \mathfrak{y}_2 \\ \\ = \mathfrak{y}_3 \end{array}$$

(−1 und −1 sind die Faktoren, mit denen die Zeilen 1 und 2 multipliziert werden, bevor sie zu Zeile 3 addiert werden.)

Ihre Lösungen sind

$$\varphi_0 = -(P_1 + P_2 + P_3), \quad Q_0 = -0{,}25\,P_1 + 0{,}125\,P_3\,. \tag{2b}$$

Da lediglich die Einflußmatrix gesucht ist, brauchen wir auch nur die Verschiebungen w_i als erste Komponenten der Vektoren $\mathfrak{y}_i$ zu berechnen, z. B. wird

$$w_2 = -4\,\varphi_0 + 16\,Q_0 + P_1 = 4\,(P_1 + P_2 + P_3) + 2\,(-2\,P_1 + P_3) + P_1 = P_1 + 4\,P_2 + 6\,P_3\,.$$

Damit haben wir die lineare homogene Beziehung zwischen den Verschiebungen und Kräften in der Form

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 1 & 1{,}125 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1{,}125 & 6 & 10{,}1875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}, \tag{2c}$$

kurz $\mathfrak{w} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{p}$.

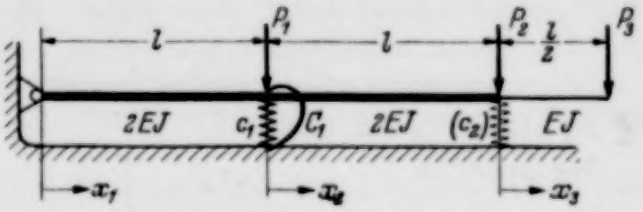


Abb. 11. Träger mit zwei, bzw. drei Feldern, teils starr, teils elastisch gestützt.

Die Einflußmatrix $\mathfrak{A}$ ist symmetrisch, wie nach dem Satz von *Betti-Maxwell* zu erwarten war.

Nun werde nachträglich die Feder $c_2 = \beta\,P/l$ angebracht. Ihre Reaktionskraft sei F_2, also hat man jetzt P_2 zu ersetzen durch $P_2 + F_2 = P_2 - \beta\,w_2 = P_2 - \beta\cdot(-4\,\varphi_0 + 16\,Q_0 + P_1)$. Dies in (2a) eingeführt ergibt die neuen Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} M_3 &= 0{,}5\,\varphi_0 + 4\,Q_0 + 1{,}5\,P_1 + 0{,}5\cdot[P_2 - \beta\,(-4\,\varphi_0 + 16\,Q_0 + P_1)] &&= 0\,, \\ Q_3 &= \quad \varphi_0 \quad + \quad P_1 + \quad [P_2 - \beta\,(-4\,\varphi_0 + 16\,Q_0 + P_1)] + P_3 &&= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2d}$$

mit den Lösungen

$$-(1 + 4\,\beta)\,\varphi_0 = (1 + 3\,\beta)\,P_1 + P_2 + (1 - 2\,\beta)\,P_3 \quad \text{und} \quad -8\,Q_0 = 2\,P_1 - P_2\,. \tag{2e}$$

Nach einiger Rechnung bekommen wir damit die Einflußmatrix

$$\mathfrak{A}^* = (\mathfrak{A} + \beta\,\mathfrak{B})/(1 + 4\,\beta), \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 19/4 \end{pmatrix}. \tag{2f}$$

Für $\beta = 0$ (fehlende Feder) geht $\mathfrak{A}^*$ in $\mathfrak{A}$, für $\beta \to \infty$ (festes Gelenk) in $\mathfrak{B}/4$ über.

Drittes Beispiel. Für das symmetrische Tragwerk der Abb. 12 sind Querkraft- und Momentenverlauf infolge einer bleibenden Senkung der Mittelstütze zu berechnen. Gegebene Werte: $l = 1{,}60$ m, $EJ = 40$ t m², $C = 100$ t m.

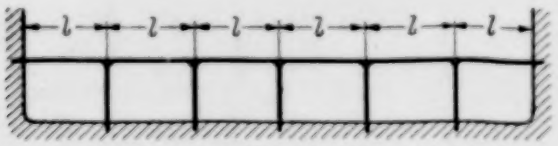


Abb. 12. Homogenes symmetrisches Tragwerk mit sechs Feldern.

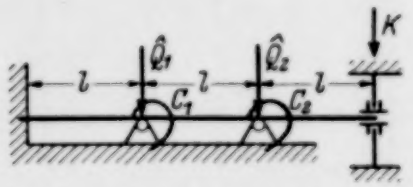


Abb. 13. Linke Hälfte des Tragwerkes der Abb. 12, schematisch dargestellt.

Die Drehfederkonstanten (Drehsteifigkeiten) C sind aus den Längen und Biegesteifigkeiten der Pfosten nach bekannten Formeln leicht zu berechnen, wir nehmen sie deshalb der Einfachheit halber als gegeben an. Da die Knoten unverschieblich sind und aus Symmetriegründen in der Mitte des Trägers Neigung (Drehwinkel) und Querkraft verschwinden müssen, können wir uns auf den dreifeldrigen Balken der Abb. 13 beschränken. Mit den Vergleichsgrößen $l^* = l$ und $P^* = 2\,E\,J/l^2$ wird nun

$$l = l^*, \quad EJ = P^*\,l^{*2}/2, \quad C = 2\,P^*\,l^*, \text{ oder kurz } l = 1\,, \quad EJ = 1/2, \quad C = 2\,,$$

womit sich die Leitmatrizen nach (9) leicht hinschreiben lassem, sie stimmen natürlich in ihren ersten vier Spalten überein.

Infolge der Bedingungen $w_1 = w_2 = 0$, $w_3 = d = \text{const}$ können wir nach dem abgekürzten Verfahren rechnen; die Sprunggrößen $\hat{Q}_1$ und $\hat{Q}_2$ (hier Auflagerkräfte, Abb. 13) ersetzen wir in den Leitmatrizen $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ (nach Tabelle 1 mit $a = 0$) durch einen *, zum Zeichen dafür, daß wir auf ihre Berechnung vorerst keinen Wert legen. Erklären wir das Moment M_0 zur Hauptkonstante und zerlegen die Nebenkonstante Q_0 (Tabelle 2, Spalte 1) nach (18) in der Form

$Q_0 = a_0 \cdot M_0 + b_0 \cdot 1$, so wird der Anfangsvektor

$$\mathfrak{y}_0 \equiv \begin{pmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ a_0 M_0 + b_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot M_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 = M_0 \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3 . \tag{3a}$$

Zahlenschema zum Beispiel 3

$$\begin{array}{c} \\ \mathfrak{L}_1 \\ \mathfrak{L}_2 \\ \mathfrak{L}_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1/3 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} M_0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -3 & \cdots\cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{Bedingung!} \\ \curvearrowright -2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 15 \\ \cdots \end{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \frac{3\delta}{35} = \mathfrak{y}_1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \mathfrak{L}_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1/3 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -6 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 11+12 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -87 & \cdots\cdots & 3\delta \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{Bedingung!} \\ \curvearrowright -2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \begin{matrix} 0 \\ -6 \\ 23 \\ -52 \\ \cdots \end{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \frac{3\delta}{35} = \mathfrak{y}_2 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\mathfrak{L}_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \boxed{35} & \boxed{-3\delta} \\ -64 & 3\delta \\ \boxed{-87} & \boxed{3\delta + K} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Bedingung!} \quad \curvearrowright -- \quad \begin{pmatrix} 35/3 \\ 0 \\ -29 \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix} \quad \frac{3\delta}{35} = \mathfrak{y}_3$$

Die vierte Komponente des Vektors $\mathfrak{y}_0$ (die Querkraft Q_0) ist also zunächst unbekannt (im Zahlenschema durch eine Punktreihe angedeutet), wird aber sogleich nach (19) aus der Bedingung $w_1 = 0 \cdot M_0 + 0 \cdot 1 = 0$ errechnet, und zwar gibt die erste Zeile von $\mathfrak{L}_1$ mit $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_3$ multipliziert

$$\left.\begin{aligned} &\text{Faktor bei } M_0\text{: } 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1/3 \cdot a_0 + 0 \cdot 0 = 0 \rightarrow a_0 = -3 , \\ &\text{Faktor bei } 1\text{: } \quad 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1/3 \cdot b_0 + 0 \cdot 1 = 0 \rightarrow b_0 = \quad 0 . \end{aligned}\right\} \tag{3b}$$

Mit dem jetzt bekannten Vektor $\mathfrak{y}_0$ rechnen wir weiter wie sonst. Die vierte Komponente von $\mathfrak{y}_1$ läßt sich wiederum wegen des * aus $\mathfrak{L}_1$ selbst nicht ermitteln (Punktreihe im Schema), wohl aber aus der Zwischenbedingung $w_2 = 0 \cdot M_0 + 0 \cdot 1 = 0$, und zwar wird nach leichter Rechnung $a_1 = 15$, $b_1 = 0$. Auch beim nächsten Schritt bleibt die vierte Zeile vorläufig offen, aus der Bedingung der bleibenden Stützensenkung

$$w_3 = 0 \cdot M_0 + \delta \cdot 1 = \delta \quad \text{mit} \quad \delta = d/l^*$$

folgt aber sofort

$$\begin{aligned} &1 \cdot 0 - 1 \cdot (-6) + 1 \cdot (23) + 1/3 \cdot a_2 + 0 \cdot 0 = 0 \rightarrow a_2 = -87 , \\ &1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \quad\quad + 1 \cdot 0 \quad\quad + 1/3 \cdot b_2 + 0 \cdot 1 = \delta \rightarrow b_2 = \quad 3\delta . \end{aligned}$$

Der letzte Rechenschritt verläuft wieder ganz normal. Die Multiplikation mit $-C = -2$ ersparen wir uns hier, da ja ohnehin $\varphi_3 = 0$ gemacht wird. Aus den im Schema eingerahmten Randbedingungen entnimmt man nun die Konstante M_0 und die Auflagerkraft K am rechten Ende:

$$\varphi_2 = \quad 35\,M_0 - 3\,\delta \qquad = 0 \rightarrow M_0 = \quad 3\,\delta/35,$$
$$Q_3 = -87\,M_0 + 3\,\delta + K = 0 \rightarrow K \;= 156\,\delta/35\,.$$

Die erste Kolonne mit M_0 multipliziert und zur zweiten addiert ergibt die gesuchten Vektoren $\mathfrak{y}_0 \cdots \mathfrak{y}_3$. Deren vierte Komponenten — das sind die Querkräfte unmittelbar rechts von den Feldgrenzen — zeichnen wir in Abb. 14 ein und gewinnen daraus die Auflagerkräfte; auch die Reaktionsmomente $-C\,\varphi_i$ sind nun mit den Drehwinkeln zugleich bekannt. Das gesamte am Balken der Abb. 13 angreifende Kräftesystem ist nach Abb. 15 im Gleichgewicht, was als Schlußkontrolle dient.

Die maximalen Schnittgrößen treten wie vorauszusehen über der Mittelstütze III auf, und zwar wird für einen Zentimeter Durchsenkung wegen

$$\delta = \frac{d}{i^*} = \frac{0{,}01\text{ m}}{1{,}60\text{ m}} = \frac{1}{160}, \quad P^* = \frac{C}{2\,l} = \frac{100\text{ t m}}{2 \cdot 1{,}60\text{ m}} = \frac{100}{3{,}2}\text{ t}$$

mit den aus Abb. 14 und 16 abzulesenden Höchstwerten:

$$\left.\begin{aligned} Q_{max} &= 52 \cdot \frac{3\,\delta}{35}\,P^* \;= \frac{52 \cdot 3 \cdot 100}{35 \cdot 160 \cdot 3{,}2}\text{ t} \qquad = 0{,}871\text{ t} \\ M_{max} &= 29 \cdot \frac{3\,\delta}{35}\,P^*\,l^* = \frac{29 \cdot 3 \cdot 100 \cdot 1{,}6}{35 \cdot 160 \cdot 3{,}2}\text{ t m} = 0{,}777\text{ t m} \end{aligned}\right\} \text{ je cm Durchsenkung.}$$

Zum Schluß noch einige Bemerkungen zur Rechenpraxis. Da hier, wie stets bei homogenen Trägern, die Leitmatrizen $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{L}_3$ einander gleich sind, werden sie auch nur ein einziges Mal aufgeschrieben, und zwar auf ein bewegliches Blatt, das an den senkrechten Kolonnen entlanggezogen wird. Zur Lösung der Gleichungen (3b) usw. läßt man auf der Rechenmaschine vier Teilprodukte auflaufen und dividiert deren Summe in einem Gang ohne Zwischenablesung durch den Faktor bei a_i bzw. b_i. Und endlich erwähnen wir noch, daß beim abgekürzten Verfahren die durch Stern und Punktreihe gekennzeichnete Zeile natürlich von der Summenprobe ausgeschlossen werden muß, was aber deren Wert nicht schmälert.

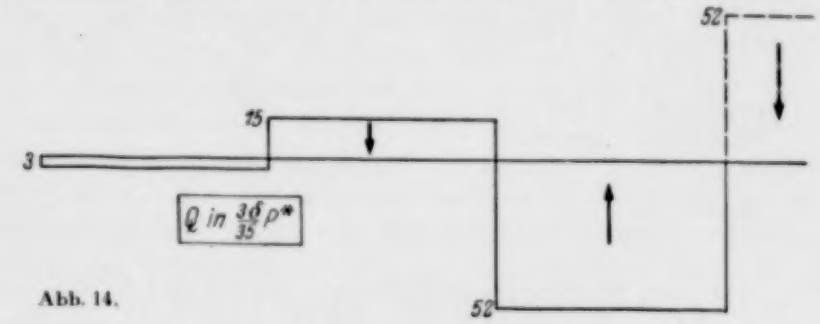


Abb. 14.

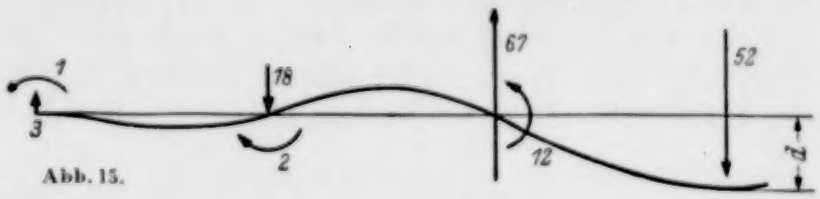


Abb. 15.

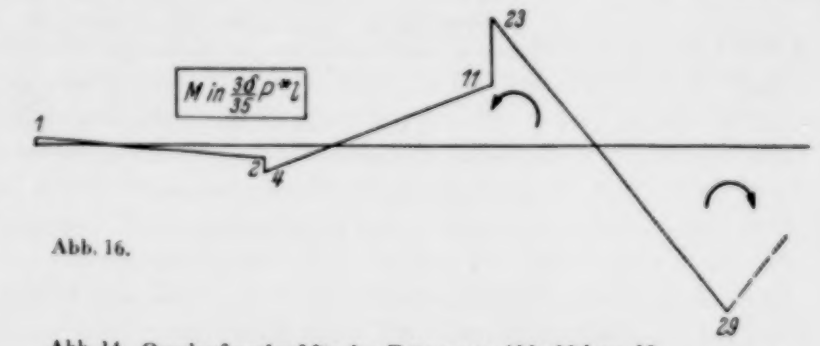


Abb. 16.

Abb. 14. Querkraftverlauf für den Träger von Abb. 13 bzw. 12.
Abb. 15. Biegelinie und Gleichgewichtssystem am Träger der Abb. 13 bzw 12.
Abb. 16. Momentenverlauf für den Träger von Abb. 13 bzw. 12.

11. Rechenaufwand; Vergleich mit der Eliminationsmethode. Wir gehen zunächst davon aus, daß die gesamte Rechnung in Zahlen (nicht in algebraischen Ausdrücken) durchgeführt wird und führen als objektives Maß für den Rechenaufwand die Anzahl der Aufschreibungen, Additionen (bzw. Subtraktionen) und Multiplikationen (bzw. Divisionen) ein. Da das Aufschreiben und Addieren von mehrstelligen Zahlen gegenüber den Multiplikationen kaum ins Gewicht fällt, beschränken wir uns der Einfachheit halber auf diese und vergleichen an ihrer Anzahl das Reduktions- mit dem Eliminationsverfahren[1]. Beiden gemeinsam ist die Vorbereitung, nämlich das

[1] Ein solcher Vergleich wurde für den Sonderfall des *Koiter*schen Verfahrens, allerdings ohne exakte Zahlenangaben, auch durchgeführt von *G. Worch*, Bauingenieur 30 (1955) S. 388.

Auswerten der Integrale (3) und (4) bzw. das Einsetzen von Zahlen in die fertigen Ausdrücke (9) und Tabelle 1; denn diese Größen erscheinen sowohl in den Leitmatrizen des Reduktionsverfahrens wie in dem Gleichungssystem

$$\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{r} \tag{27}$$

der Eliminationsmethode mit den u Überzähligen $(X_1, X_2 \ldots X_u) = \underline{\mathfrak{x}}$ und den Belastungsgliedern $(r_1, r_2 \ldots r_u) = \mathfrak{r}$.

Das Reduktionsverfahren verlangt nun außerdem für jedes der n Felder: a) die Multiplikation der Leitmatrix $\mathfrak{L}_i$ mit einem in drei (bzw. zwei) Anteile aufgespaltenen Vektor, b) das Berechnen der Produkte $c_i\, w_i$ und $C_i\, \varphi_i$, c) die Multiplikation der ersten beiden Kolonnen (bzw. der ersten allein) mit den freien Konstanten (bzw. der Hauptkonstante). Die Tabelle 4 gibt über die erforderliche Anzahl von Multiplikationen Aufschluß, und zwar für die beiden Extremfälle des vollkommen elastisch gestützten Balkens (Federn und Drehfedern, Beispiel 1) und des Clapeyronträgers. Darin ist das Auflösen der beiden linearen Gleichungen nicht einbezogen, da ja ein Mehrfaches dieser Arbeit beim ersten Rechenschritt infolge der einfachen Form des Anfangsvektors $\mathfrak{y}_0$ eingespart wird. Beim homogenen Träger mit lauter gleichen Feldlängen l und Biegesteifigkeiten $E\,J$ besteht die Berechnung des Produktes Leitmatrix mal Vektor bei Wahl von $l^* = l$ und $P^* = 6\,EJ/l^2$ überhaupt nur aus je einer Multiplikation mit den Zahlen 3, —3 und —6 (siehe die beiden ersten Leitmatrizen im Beispiel 2).

Tabelle 4. *Anzahl der erforderlichen Multiplikationen für ein Feld beim Reduktionsverfahren.*

Berechnung von	Träger, elastisch gestützt und elastisch eingespannt		Durchlaufträger auf festen Stützen (Clapeyronträger)	
	allgemein	homogen	allgemein	homogen
a) Leitmatrix mal Vektor	$6 \cdot 3 = 18$	$3 \cdot 3 = 9$	$6 \cdot 2 = 12$	$3 \cdot 2 = 6$
b) $c_i\, w_i$, $C_i\, \varphi_i$	$3 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 2 = 6$	0	0
c) sämtlichen Kraft- und Deformationsgrößen	8	8	4	4
Summe	32	23	16	10

Nun zur Eliminationsmethode. Außer der Vorbereitung muß a) das Gleichungssystem (27) aus den Funktionswerten (3) und (4) zusammengestellt und b) aufgelöst werden. Da sich allgemeine Angaben nicht machen lassen, beschränken wir uns auf den Durchlaufträger und den Balken auf elastischen Stützen, deren Gleichungssysteme drei- bzw. fünfgliedrig sind, und stellen die Anzahl der erforderlichen Multiplikationen in der Tabelle 5 zusammen.

Tabelle 5. *Anzahl der erforderlichen Multiplikationen für die Berechnung von u Überzähligen bei der Eliminationsmethode.*

	Träger auf elastischen Stützen (fünfgliedrig)	Träger auf festen Stützen (dreigliedrig)
a) Berechnen der Koeffizienten	$27\,u - 16$	0
b) Auflösen der Gleichungen	$10\,u - 14$	$5\,u - 4$
Summe	$37\,u - 30$	$5\,u - 4$

Da bei beiden Trägern zu n Feldern $n - 1 = u$ Überzählige (nämlich die Stützmomente) gehören, ist allein an der Anzahl der Multiplikationen gemessen, die Eliminationsmethode im Vorteil beim Clapeyronträger. Beim Balken auf elastischen Stützen aber ist das Reduktionsverfahren schon gleichwertig und wohl stets überlegen, wenn die linken Seiten des Gleichungssystems nicht formelmäßig fertig vorliegen. Treten zu den elastischen Stützen noch elastische Einspannungen (Drehfedern) hinzu (wie im Beispiel 1), so wird das Reduktionsverfahren kaum davon berührt; dagegen verdoppelt sich sofort die Anzahl der Überzähligen, die Elimination der

Kraft- oder Deformationsgrößen wird dann äußerst mühselig, findet sich in der gängigen Literatur der Baustatik auch nirgends durchgeführt.

Natürlich ist die Anzahl der Multiplikationen nicht immer das geeignete Maß; für die üblichen Tischrechenmaschinen zum Beispiel ist vielmehr die Anzahl der skalaren Produkte wesentlich, und in dieser Hinsicht ist das in Matrizen geschriebene Reduktionsverfahren offenbar stets im Vorteil, da sich der Eliminationsprozeß selbst wie auch das Einsetzen in fertige Formeln nicht durchweg in Form von skalaren Produkten erledigen läßt.

12. Die Variation der Belastung. Soll derselbe Träger für verschiedene Belastungen berechnet werden, so hat man lediglich die fünften Spalten der Leitmatrizen nach Tabelle 1 auszuwechseln und die letzte Kolonne im Zahlenschema zu erneuern; in den beiden Randbedingungen ändern sich dann nur die rechten Seiten. Auch die Eliminationsmethode braucht infolge der Aufspaltung in zwei „gestaffelte" Gleichungssysteme (Dreiecksmatrizen) nur einen geringen Teil der Rechnung zu wiederholen. Das bisweilen empfohlene Aufstellen der Reziproken $\mathfrak{A}^{-1}$ (in der Baustatik auch „Konjugierte" genannt) bedeutet im allgemeinen eine Arbeitsvergeudung von mehreren Hundert Prozent und scheidet daher in der Praxis aus.

Auch das Mitführen freier Parameter in den Belastungsgrößen bereitet keine Schwierigkeiten. Insbesondere bei Einzelkräften und -kräftepaaren kann man entweder deren Beträge offen lassen („Einflußmatrizen", Beispiel 2) oder deren Angriffspunkte („Einflußlinien") oder schließlich beides.

13. Die Variation der Trägergrößen; der nachträgliche Einbau von Stützen und Gelenken. Von der Variation der Längen, Biegesteifigkeiten und Federkonstanten werden beim Reduktionsverfahren die Leitmatrizen, bei der Eliminationsmethode außer den rechten Seiten auch noch die Elemente der Matrix $\mathfrak{A}$ selbst betroffen; große Teile der Rechnung müssen daher wiederholt werden, falls man nicht eine oder mehrere Größen als freie Parameter bis zum Schluß mitnehmen will, was beim Reduktionsverfahren, da immer nur multipliziert, niemals dividiert wird, mühelos gelingt, nicht aber bei der Eliminationsmethode. Denn der *Gauß*sche Algorithmus verlangt bei jedem Rechenschritt eine Division, wodurch allgemeine formelmäßige Ausdrücke in Gestalt von gebrochenen rationalen Funktionen so stark anschwellen können, daß unter Umständen der Algorithmus als praktisches Verfahren völlig in Frage gestellt wird.

Will man schließlich erst nachträglich Stützen oder Gelenke einbauen, d. h. die Anzahl der Felder vermehren, so muß das Eliminationsverfahren nicht nur die Zahlenrechnung, sondern auch die Aufstellung der Gleichungen selbst (den Eliminationsvorgang) wiederholen. Beim Reduktionsverfahren dagegen führt man zusätzliche Federn (Beispiel 2) oder Sprunggrößen an beliebiger Stelle des Trägers mit Hilfe der Gleichungen (2) ein und multipliziert sie für sich in eigenen Kolonnen im Schema (25) bis nach unten durch; etwa neu hinzugekommene Zwischenbedingungen werden dann zum Schluß mit den beiden Randbedingungen gemeinsam erfüllt; das Ganze läuft also im wesentlichen auf das „erweiterte Verfahren" von Ziffer 8 c) hinaus.

14. Verallgemeinerungen des Verfahrens. Das Reduktionsverfahren ist in zwei Richtungen verallgemeinerungsfähig:

a) Die Differentialgleichung (1) und mit ihr die Feld- und Leitmatrizen werden durch andere ersetzt, gegebenenfalls auch die Übergangsmatrizen. So kann man zum Beispiel ohne weiteres den Einfluß von Schubkräften[1] oder Temperaturschwankungen in die Matrix (9) aufnehmen; ebenso ändert sich im Prinzip nicht viel, wenn etwa die Differentialgleichung des Knickens oder Schwingens zugrunde liegt. Bei homogenen Problemen (freien Schwingungen, Knicken) kann man in allen Leitmatrizen die nun überflüssigen fünften Spalten und Zeilen streichen; auch fehlt die dritte Kolonne im Schema (25). Sei schließlich irgend eine lineare (in)homogene Differentialgleichung mit nicht notwendig konstanten Koeffizienten der Ordnung m anstelle von (1) gegeben und kennt man dazu ein Fundamentalsystem (und eine Partikularlösung), so bereitet auch hier das Aufstellen der Feld- und Leitmatrizen von der Ordnung m $(m + 1)$ keine Schwierigkeiten[2].

b) Die Topologie des Trägers wird verallgemeinert. Für beliebig verzweigte offene (d. h. einfach zusammenhängende) räumliche Rahmen bietet das Reduktionsverfahren kaum neue Gesichtspunkte; es sind jetzt lediglich mehrere, voneinander unabhängige Gleichungssysteme

[1] Siehe etwa *H. Fuhrke*, Ing.-Arch. 23 (1955), S. 333, Gleichung (27).
[2] *S. Falk*, a. a. O.

zweiter Ordnung zu lösen; im wesentlichen verläuft die Rechnung wieder nach dem Schema (25). Enthält der Rahmen jedoch geschlossene Umläufe (Stockwerkrahmen, Trägerroste), so treten auch Gleichungssysteme von höherer als zweiter Ordnung auf, doch soll davon erst in einer späteren Arbeit die Rede sein.

15. Zusammenfassung. Wir haben das in der Idee nicht neue Reduktionsverfahren auf den beliebig gestützten Durchlaufträger angewandt, allgemeine Formeln zur Aufstellung der Grundgleichungen hergeleitet und die Rechnung so weit schematisiert, daß sie auch von Hilfskräften oder auf Rechenautomaten durchgeführt werden kann. Der Vergleich mit der klassischen Eliminationsmethode zeigte, daß das Reduktionsverfahren dem Rechenaufwand nach fast immer, in der Weite seines Anwendungsbereiches aber grundsätzlich überlegen ist. Drei hinreichend erläuterte Beispiele geben einen Begriff von der Geschlossenheit einer in Matrizen durchgeführten größeren Zahlenrechnung.

(Eingegangen am 17. Januar 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Sigurd Falk*, Braunschweig, Celler Straße 93a.

Soeben erschien:

Höhere Technische Mechanik

Nach Vorlesungen von Dr.-Ing. **István Szabó,** o. Professor der Mechanik an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg. Mit 402 Abbildungen. XII, 472 Seiten Gr.-8°. 1956.

Ganzleinen DM 31,50

Inhaltsübersicht: **I. Die Prinzipien der Mechanik:** Das Prinzip der virtuellen Arbeiten als allgemeines Grundgesetz der Statik. Anwendungen des Prinzips der virtuellen Arbeiten auf die Elastizitätstheorie (Energiemethoden der Elastizitätslehre). Das Prinzip von D'Alembert. Das Hamiltonsche Prinzip. Schwingungen von Saiten (Seilen), Membranen und Stäben. Lagrangesche Bewegungsgleichungen. Die räumliche (Dreh-)Bewegung eines starren Körpers. Variationsrechnung mit Anwendungen auf die Mechanik. — **II. Ausgewählte Probleme der höheren Elastizitätstheorie:** Der allgemeine Spannungs- und Deformationszustand der linearen Elastizitätstheorie. Der ebene Spannungszustand. Der achsensymmetrische Spannungszustand. Theorie der dünnen Platten mit kleiner Durchbiegung (Kirchhoffsche Plattentheorie). Einblick in die Schalentheorie. Torsion von Stäben und Balken. Instabilitätsprobleme. — **III. Einblick in die Elastizitätstheorie:** Allgemeine Betrachtungen. Anwendungen. — **IV. Theorie der Flüssigkeiten und Gase:** Ideale Flüssigkeiten. Dynamik inkompressibler idealer Flüssigkeiten. Bewegung zäher Flüssigkeiten. Einblick in die Dynamik idealer Gase. Potentialtheoretische Behandlung gasdynamischer Probleme. Gasströmungen mit Unstetigkeitsflächen (Verdichtungsstöße). — **Namen- und Sachverzeichnis.**

Früher eschien:

Einführung in die Technische Mechanik

Nach Vorlesungen. Von Dr.-Ing. **István Szabó,** o. Professor der Mechanik an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg. Mit 484 Abbildungen. XII, 383 Seiten Gr.-8°. 1954.

Steif geheftet DM 19,50; Ganzleinen DM 22,50

Inhaltsübersicht: **Die Statik des starren Körpers:** Einleitung. Die Elemente der Vektorrechnung. Über die Kraft. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. Ebene Kräftegruppen am starren Körper mit nicht gemeinsamem Angriffspunkt. Über Kräftepaar und Moment. Kräftezusammensetzung im Raume. Ebene Statik des starren Körpers. Über den Schwerpunkt. Der statisch bestimmt gelagerte Balken. — **Einige elementare Probleme der Elastizitätstheorie:** Allgemeine Bemerkungen und Gesetze zur Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre. Die elementare Theorie der Balkenbiegung. Flächenmomente zweiten Grades. Die elastische Linie des Balkens. Ergänzungen zur Theorie des Balkens. — **Statik der Systeme starrer Körper:** Systeme aus einer endlichen Anzahl starrer Körper. Ebene Fachwerke. Statik der Systeme aus unendlich vielen starren Körpern (Statik der Seile und Ketten). — **Einführung in die Dynamik:** Kinematische Betrachtungen. Das Newtonsche Grundgesetz und seine Folgerungen. Kinetik des Schwerpunktes. Über Bewegungswiderstände (Reibung). Die einfachsten Schwingungsprobleme der Mechanik. Über den Stoß. Einblick in die Hydromechanik. Grundgesetze der Ähnlichkeitsmechanik. — **Namen- und Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

International Union of Theoretical and Applied Mechanics (Iutam).

Colloquium on Fatigue. Stockholm, May 25—27. 1955, Proceedings.

Colloque de Fatigue. Stockholm, 25—27 Mai 1955. Comptes Rendus.

Kolloquium über Ermüdungsfestigkeit.

Stockholm, 25.—27. Mai 1955. **Verhandlungen.**

Editors **Waloddi Weibull,** Dr. phil. Professor emeritus Kungl. Tekniska Högskolan (Royal Institute of Technology), Stockholm, — **Folke K. G. Odqvist,** Dr. phil. Professor Kungl. Tekniska Högskolan (Royal Institute of Technology), Stockholm with 194 Figures. XI 339 Seiten Gr.-8°. 1956.
Ganzleinen DM 46.50

Contents — Sommaire — Inhalt

Preface. Organizing Committee. Authors. Other participants. — F. Bastenaire: Étude critique de la notion de dommage appliquée, à une classe étendue d'essais de fatigue. — F. Bastenaire, R. Cazaud, M. Weisz: Essais de fatigue statistiques suivant la méthode de charge progressive. — A. Ferro, U. Rossetti: Contribution à l'étude de la fatigue des matériaux avec essais à charge progressive. — W. N. Findley: Theories relating to Fatigue of Materials under Combinations of Stress. — A. Fransson: Effect of Simultaneous Cyclic Variation of Stress and Temperature on a High Temperature Material. — A. M. Freudenthal: Physical and Statistical Aspects of Cumulative Damage. — E. Gassner: Ermüdungsfestigkeit bei statistisch veränderlichen Spannungsamplituden. — F. Gatto: New Statistical Methods Applied to the Analysis of Fatigue Data. — M. Hempel: Über Verformungserscheinungen in Stählen bei der Wechselbeanspruchung. — R. B. Heywood: The Effect of High Loads on Fatigue. — R. Jacquesson: Modifications de texture cristalline produites par des efforts alternés. — A. Johansson: Fatigue of Steels at Constant Strain Amplitude and Elevated Temperature. — A. Kammerer: Une définition théorique de la limite de fatigue. — P. Kuhn: Effect of Geometric Size on Notch Fatigue. — P. Laurent: Les travaux récents de l'Institut de Recherchers Métallurgiques de Sarrebruck dans le domaine de la fatigue. — O. Lissner: Einige Versuche über die Vorgänge in der Oberflächenschicht von Ermüdungsproben. — L. Locati: Essais de Fatigue par flexion avec fréquences superposées. — L. Martinaglia: Ziele der Ermüdungsforschung in der Schweiz, gezeigt am Beispiel von Dauerversuchen an Schraubenverbindungen. — F. A. McClintock: Variability in Fatigue Testing: Sources and Effect on Notch Sensitivity. — I. A. Oding: Über den Mechanismus der Zerstörung bei der zyklischen Belastung von Metallen. — R. E. Peterson: Torsion and Tension Relations for Slip and Fatigue. — A. I. Petrussewitsch: Einige Besonderheiten der Kontaktermüdung. — A. E. Phillips: Some Observations on the Propagation of Fatigue Cracks. — F. J. Plantema: Some Investigations on Cumulative Damage. — J. T. Ransom: A Guide to Statistical Methods for Use in Fatigue Testing. — J. Salokangas: Die durch große Zug- und Druckermüdungsbelastungen hervorgebrachte mechanische Hysterese in Stählen. — C. Schaub, W. Liedtke: Der Mechanismus des Dauerbruchs metallischer Werkstoffe. — F. R. Shanley.: A Proposed Mechanism of Fatigue Failure. — D. G. Sopwith: Recent Researches on Fatigue at the Mechanical Engineering Research Laboratory, East Kilbride. — R. J. Taylor: Experimental Design and Methods of Analysis Used in Studying Effects of Metallurgical Variation on Fatigue. — G. V. Uzhik: A Contribution to the Theory of the Fatigue of Metals. — W. Weibull: Basic Aspects of Fatigue. — F. Wever: Ausscheidungsvorgänge in Stählen bei ruhender und wechselnder Beanspruchung. — P. E. Wiene: Bending Fatigue of Large Welded Test Pieces with Regard to Velocity of Crack Propagation. — E. W. C. Wilkins: Cumulative Damage in Fatigue. — Subject index. — Tables des matières. — **Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Mit 2 Beilagen des Springer-Verlages · Berlin / Göttingen / Heidelberg.
Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. 57 09 2354 0,8 K. B./Z. 040.